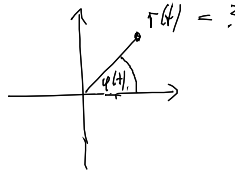


#### 4.4. Berechnung der Bahnformen

E-Satz:  $E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{2\mu r^2} + U(r)$ ,  $E = \text{Konstant}$ , vorgeben

Differentialgleichung für  $r(t)$   
nichtlinear!



1. Mgl. zur Lösung:

Man stellen sich  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ , Trennung der Variablen  $r, t$  mgl.

2. Mgl. zur Lösung:

Substitution:  $s(t) = r^{-1}(t)$  ( $\frac{1}{r} = s$ ,  $\frac{1}{s} = r$ )

i)  $U(r) = -\frac{G\mu M}{r} \rightarrow -G\mu M s = V(s)$

ii)  $\frac{l_z^2}{2\mu r^2} \rightarrow \frac{l_z^2}{2\mu} s^2$

iii)  $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d(\frac{1}{s})}{ds} \dot{s} = -s^{-2} \dot{s}$

einsetzen in E-Satz:

$$\frac{\mu}{2} \frac{\dot{s}^2}{s^4} + \frac{l_z^2}{2\mu} s^2 + V(s) = E$$

aus Substit.:  $s = s(t) \rightarrow s = s(\varphi)$  ergibt sich Schwüngeingleichung:

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \underset{||}{s'} \cdot \frac{l_z s^2}{\mu}, \text{ verwenden führt auf:}$$

$$\frac{ds}{d\varphi}$$

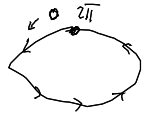
$$E = \frac{l_z^2}{2\mu} (s'^2 + s^2) + V(s) \quad \text{mit } s = s(\varphi)$$

nach  $\varphi$  differenzieren ergibt Oszillationsgleichung ( $\hat{u} A$ ) für  $s(\varphi)$ :

$$s'' + s = G m^2 M / \ell_z^2$$

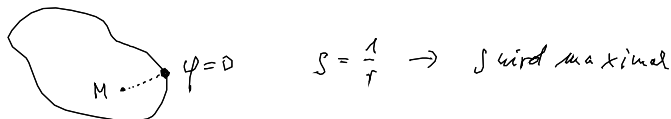
Lösung: 
$$s(\varphi) = \underbrace{A \sin \varphi + B \cos \varphi}_{\text{allg. Lsg. d. homogenen Dgl.}} + \underbrace{G m^2 M / \ell_z^2}_{\text{speziell Lsg. d. inhomogenen Dgl.}}$$

- gesucht sind Konstanten:  $A, B$
- $\varphi \in [0, 2\pi]$ , Lösung  $s(\varphi)$  ist  $2\pi$  periodisch und hat damit geschlossene Bahnkurve



reduziert aus spezieller  $u(r)$  bzw.  $u(s)$  als Gravitationspotential,  
gilt nur für:  $r^2, \frac{1}{r}$

Weitere Rechnung erfordert  $A, B$  zur Diskussion der Bahnkurve:  
aufgrund geschlossener Bahnkurve Fokusennähepunkt



$$s \text{ extremal} \rightarrow s' / \varphi=0 = (A \cos \varphi - B \sin \varphi) \Big|_{\varphi=0} \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow A = 0$$

$$s \text{ maximal} \rightarrow s'' / \varphi=0 = -B < 0 \rightarrow B > 0$$

$$\downarrow \text{ mit } s = \frac{1}{r} = \frac{G m^2 M}{\ell_z^2} \left( 1 + B \frac{\ell_z^2}{G m^2 M} \cos \varphi \right)$$

$$= \frac{1}{k} \left( 1 + \varepsilon \cos \varphi \right)$$

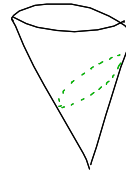
Def von  $\varepsilon, k$

i)  $k = \frac{L_z^2}{Gm^2M}$  ist mit  $L_z$  festgelegt ( $L_z = \text{konstant}$ )

ii)  $\varepsilon = \mathcal{E}k > 0$  mit  $\mathcal{E}$  festgelegt

$\varepsilon$  existiert folgende Parameterdarstellung f. Bahnkurve:

$$r = r(\varphi) = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$



Beschreibe die Kegelschnitte  $\varepsilon > 0$ :

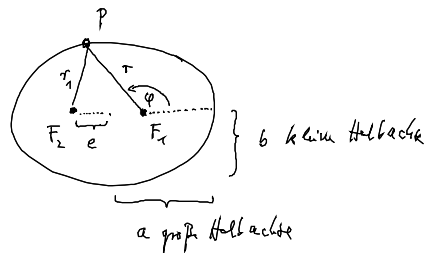
$\varepsilon < 1$ Ellipse	} N.A.S
$\varepsilon = 1$ Parabeln	
$\varepsilon > 1$ Hyperbeln	

### 4.5. Die Keplerschen Gesetze

1. Keplersches Gesetz: Planeten bewegen sich auf Ellipse in dem Brennpunkt die Sonne steht

Ellipse: Kurve aus Punkte P für die die Summe der Abstände  $r, r_1$  von den Brennpunkten  $F_1, F_2$  den konstant Wert  $2a$  haben:

$$r + r_1 = 2a$$



$F_1$ : Koordinatursprung

wie Bsp:  $r_1 = r \rightarrow r = a$

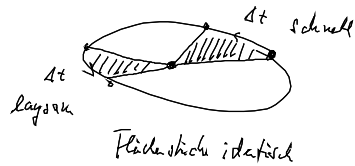
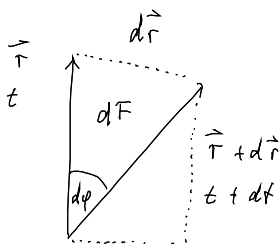
$$e^2 + b^2 = a^2$$

$$b^2 = a^2 - e^2$$

ÜA: Polar Koordinate:  $r = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$       $\varepsilon = \frac{e}{a}$  ,  $k = \frac{b^2}{a}$

Kartesische Koordinate:  $1 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}$

2. Keplersches Gesetz: Fahrstrahl von Sonne zu Planet überstricht in gleiche Zeiten gleiche Fläche:  
(Fläche proportional Zeit)



Def. Bogenmaß:  $d\varphi = \frac{|d\vec{r}|}{|\vec{r}|}$  ,  $|\vec{r}| = r$

Fläche:  $dF = \frac{1}{2} |\vec{r}| |d\vec{r}| = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$

$\int 2 \frac{dF}{dt} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{konstant} \rightarrow \frac{dF}{dt} = c_0 \int F = c_0 t \quad (F(0) = 0, t_0 = 0)$   
 $\sim$  Drehimpuls

$\rightarrow$  Die überstrichene Fläche ist proportional zur Umlaufzeit

3. Keplersches Gesetz: Quadrat der Umlaufzeit zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachse.

$\frac{dF}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{l_z}{2m} = \text{konstant}$  , Auswertung f. 1 vollen Umlauf

$F_{\text{Ellipse}} = \frac{l_z}{2m} T$  ,  $T$ : Periodendauer f. 1. Umlauf ,  $F_{\text{Ellipse}} = a \cdot b \cdot \pi$

$$T = \frac{2\pi}{l_2} a b \pi \quad , \quad \text{quadrieren und mit } a^{-3} \text{ multiplizieren}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\left(\frac{2\pi}{l_2}\right)^2 a^2 b^2 \pi^2}{a^3} = \left(\frac{2\pi}{l_2}\right)^2 \frac{b^2}{a} \pi^2 = \text{Konstante, unabh. v. Planet}$$

ist zu zeigen

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } K = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{b^2}{a} \\ \text{ii) } K = \frac{l_2^2}{GM^2 M} \end{array} \right\} \text{ 2 verschiedene Darstellg.}$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{(2\pi)^2}{l_2^2} \frac{l_2^2}{GM^2 M} \cdot \pi^2 = \frac{(2\pi)^2}{GM} = \text{Konstante und unabh. v. Planeten}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \quad \text{f. 2 verschiedene Planeten}$$

Bemerkung: a)  $F = -\frac{GMm}{2a}$   $E$  ist bestimmt durch große Halbachse  $a$ ,  
ohne Beweis, erfolgt durch Einsetzen d. Bahnkurve in  $E$ -Satz

b) 2 Modifikationen zum einfachen 2-Körperproblem:

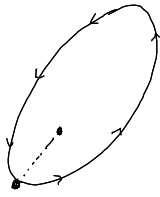
- Einfluß der anderen Planeten  $\rightarrow$  Korrektur d. Störrechnung (1850 erledigt)
- weitere Anteil der Periheliondrift (wichtig Merkur)  $\rightarrow$  allgemeine Relativität

#### 4.6. Periheliondrift

astronomisch Beobachtungen zeigen Periheliondrift

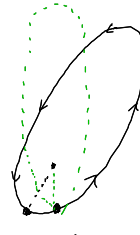
Neues 2-Körperproblem:

ähnlich auch Planet J durch Periheliondrift  
nach ART



End = Start

$T_{\text{Newton}}$



Start End

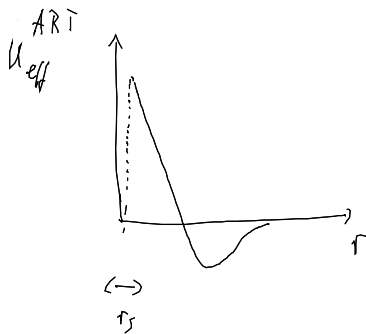
Perihel = Sonne nächstgeleg. Pkt

$T_{\text{Merke}} < T_{\text{ART}}$  → Ellipse wird um Perihel verkippt → FS  $\psi$  der zu Nicht period. Zeit in  $2\pi$

ART - Empir. Satz :

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} - \underbrace{\frac{l_z^2}{2mr^2} \frac{r_s}{r}}_{\text{muss proportional } \frac{1}{r^3}} - \frac{G_M M}{r} = \text{Konstant}$$

- Beweis:
- Zeitabhäng. ist eigentlich Eigenzeit abhängig.
  - $r_s$  Schwarzschildradius,  $\frac{2GM}{c^2}$  ← Lichtgeschwindigkeit
  - im Sonnensystem ist der neue Term ein klein Korrektur



relativistische Korrekturen sind am Ursprung wichtig und in etwa  $r_s$ -breit

Abschätz. der Periheliondrehung

S-Gleichung wird modifiziert durch Zusatzterme:

$$s'' + s = \frac{GM^2 M}{r_z^2} + \frac{3GM}{c^2} s^2 \quad \text{nichtlinear Dillaktor!}$$

nur an ART

Störungs Theorie :  $s = s_0 + s_1$   $s_1$ : Klein Korrektur

einsetzen.  $s_0$ : Newtonsche Lösung  $\rightarrow$  Kreisbahn:  $s_0 = \frac{GM^2 M}{r_z^2}$

$(s'' = 0)$

$$s_1'' + s_1 = \frac{3GM}{c^2} (s_0^2 + 2s_0 s_1 + \cancel{s_1^2})$$

Klein

$$s_1'' + s_1 \left(1 - \frac{6GM}{c^2} s_0\right) \approx \frac{3GM}{c^2} s_0^2$$

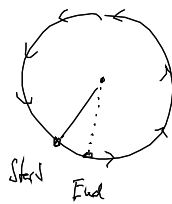
keine Schwachsp. gegen  $\omega^2$  Vergleichb. Ursprung d. Dillaktor

$$\omega = \left(1 - \frac{6GM}{c^2} \cdot \frac{GM u^2}{r_z^2}\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{3G^2 M^2 u^2}{c^2 r_z^2}$$

$\rightarrow$  f. harmonische Lösung ergibt sich kein geschlossenes Bahn u.a.  $\varphi \rightarrow \varphi + \delta \cdot \varphi$

=  $\uparrow$   
Korrekturen-  
faktor

$$\omega_{\text{Newton}} > \omega_{\text{ART}} \rightarrow T_{\text{Newton}} < T_{\text{ART}}$$



Bei jedem Umlauf wird  $\delta \cdot \varphi$  akkumuliert,  
erklärt die Periheliondrift perfekt (Einstein 1915)

Merkur:  $43''$  pro Erdjahrhundert