3.2.2. Zeitartige Komponente $\alpha = 0$

$$\frac{d}{d\tau} p^0(\tau) = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} p^0(t) = \gamma(t) \frac{d}{dt} \underbrace{(mc\gamma(t))}_{p^0(t)} = mc \left(\gamma^3(t) \frac{\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}}{c^2} \right) \overset{!}{=} \frac{\vec{f}_N \cdot \vec{v}}{c}$$

Behauptg. ....

dazu:

letzte VL

$$\frac{\vec{f}_N \cdot \vec{v}}{c\gamma} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{m}{c\gamma} \left(\gamma \dot{v}_\alpha + \gamma^3 \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}\, v^\alpha \right) \cdot v^\alpha$$

ausführlich sehen

$$= \frac{m}{c} \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} \left(1 + \gamma^2 \frac{1}{c^2} \frac{v^2}{c^2} \right) \qquad \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \text{ einsetzen}$$

$$\frac{\vec{f}_N \cdot \vec{v}}{c\gamma} = \frac{m}{c} \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} \gamma^2 \longrightarrow \frac{\vec{f}_N \cdot \vec{v}}{c} = \frac{m}{c} \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} \gamma^3$$

insgesamt:

$$\frac{d}{dt} p_0 = \frac{\vec{f}_N \cdot \vec{v}}{c} \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(m c^2 \gamma(t) \right) = \vec{f}_N \cdot \vec{v}}$$

$\vec{f}_N \cdot \vec{v} \;\hat{=}\;$ Leistung, d.h. ist dies eine Energiebilanz

$$\frac{d}{dt} E = \vec{f}_N \cdot \vec{v} \quad \text{und} \quad \boxed{E = mc^2 \gamma(t) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_{rel}(t)\, c^2}$$

4. Zusammenfassung (bisher)

a) relativistische Formulierg. d. Bewegungsproblems:

$$\frac{d}{dt}\left(m_{rel}(t) \dot{\vec{r}}(t) \right) = \vec{f}_N$$

Analogie zu Newtongl. ($v \ll c$, $\gamma \to 1$)

Bsp.: $\vec{f}_N$ = konstant (Kapitel I), zeigt c als maximale Geschwindigkeit

b) relativistische Energie $E = m_{rel}(t)\, c^2$, $m_{rel}(t) = \dfrac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

- Äquivalenz zw. Energie und Masse : (2× El.-Masse)

$\Delta E \mathrel{\hat{=}} \Delta m_{rel}$, Beispiel Massendefekt, extrem Bsp.: Annihilation von Positron/Elektron führt zu γ-Quante (masselos)

betrifft sowohl „Ruheenergie" als auch „Bewegungsenergie" $(v \neq 0)$

- geringe Geschwindigkeit $v \ll c$: $E = \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{Newton kin. Energie}} + \dots$

Newton: Energieskala kann um Konstante verschoben werden, Einstein: Konstante fest mc^2.

c) Energie-Impuls-Beziehung: Newton : $E_{kin} = \frac{m}{2} v^2 = |p = mv| = \frac{p^2}{2m}$

$E_{kin}(p) = \frac{p^2}{2m}$ (Teilchen)

$E_{Licht}(p) \approx p$

relativistisch: $p^\alpha = \underbrace{(mc\gamma, m v_i \gamma)} = \underbrace{\left(\frac{E}{c}, p_i\right)}$ $i = 1,2,3$

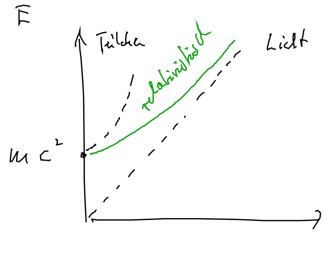
berechne: $\sum_\alpha p_\alpha p^\alpha = \underbrace{m^2 c^2 \gamma^2 - m^2 v^2 \gamma^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2}_{\text{umstellen nach } E = E(p) \text{, dazu } \gamma \text{ einsetzen}}$

$$\boxed{E(p) = \left(m^2 c^4 + c^2 p^2\right)^{1/2}}$$

relativistische Energie-Impuls Relation

f. klein p : $E = mc^2 + \frac{p^2}{2m}$ „teilchenartig"

f. große p : $E = cp$ „lichtartig"



Interpolation zw. Teilchen / Welle

5. Einsteinsches Äquivalenzprinzip

Vorbetrachtung: haben Newton gl. f. $\vec{r}(t)$ modifiziert $\frac{d}{dt}(m_{rel} \dot{\vec{r}}) = \vec{f}_N$

Gravitation: $\vec{f}_N^{\,grav} = \vec{P}\,\dfrac{G m M}{|\vec r(t) - \vec R\,|}$

$\vec R$: Körper mit Masse M, macht Gravitationswirkung auf $\vec r(t)$

nicht sinnvoll, weil: $\vec R \to \vec R(t)$ führt zu einer „instantanen" Wirkung auf $\vec r(t)$

↯ mit c als maximaler Geschwindigkeit

Lorentzkraft: $\vec f_N^{\,L} = q\left(\vec E(\vec r,t) + \vec v \times \vec B(\vec r,t)\right)$

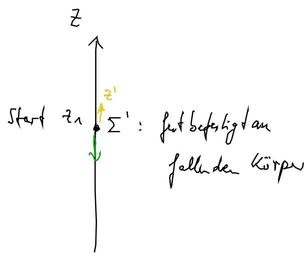
$\vec E, \vec B$: Lorentz invariante em. Feld

q - Ladung

diese Kraft ist sinnvoll definiert

Versuch: $$\frac{d^2 x^\alpha(\tau)}{d\tau^2} = g^\alpha(x^\beta)$$ Ansatz f. g^α (Gravitationskraft / Feld)

Gedankenexperiment (Einstein): freier Fall in Erdnähe



Σ: $\ddot z = -g$, $z = z_1 - g\dfrac{t^2}{2}$

Σ': Ursprung d. z' System $z_0 \,\hat{=}\, z(t)$

$z \to z(t) = z_0(t) + z'(t)$, zweimal differenzieren

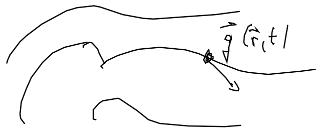
$$\ddot z = \ddot z_0 + \ddot z' \longrightarrow -g = -g + \ddot z' \longrightarrow \ddot z' = 0$$

Das Gravitationsfeld ist wegtransformiert durch Wahl von Σ'.

Scheinkraft im beschleunigten System hebt Gravitation weg.

Idee v. Einstein „Äquivalenzprinzip":

In jedem Raum-Zeit-Punkt läßt sich ein lokales „frei fallendes" Σ' finden, so daß in Σ' die Naturgesetze die Form wie im nicht beschleunigten System Σ bei Abwesenheit von Gravitation hätten. Insbesondere gilt in Σ' die spezielle RT.



wird durch $\Sigma'(\vec r, t)$ beseitigt

Koordinaten in Σ: $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, $x_\alpha = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$

kontravariant kovariant

Koordinaten in Σ': $\xi^\alpha = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $\xi_\alpha = (\xi^0, -\xi^1, -\xi^2, -\xi^3)$

in Σ' gilt SRT:

$$ds^2 = \sum_\alpha d\xi_\alpha d\xi^\alpha = \sum_{\alpha,\beta} \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

Abstand

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

„Minkowski-Tensor"

Summenkonvention: $\sum_\alpha d\xi_\alpha d\xi^\alpha \equiv d\xi_\alpha d\xi^\alpha$

$$\sum_{\alpha,\beta} \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta \equiv \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

über paarweise oben/unten auftretende Indizes wird summiert

kenne noch keine Zshg. zwischen x^α, ξ^α, $\exists$ $\xi^\alpha(x^\mu)$ u. umgekehrt

nach Kettenregel $d\xi^\alpha = d\xi^\alpha(x^\mu) = \sum_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \xi^\alpha(x^\mu)\right) dx^\mu$

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \underbrace{\sum_{\mu,\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}}_{\text{neuer Tensor } g_{\mu\nu}} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

„Riemanntensor, metrischer Tensor"
enthält das Gravitationsfeld

Metrischer Tensor wird sich als das Gravitationsfeld herausstellen (Verallgemeinerg.)

z.B. $g_{00} \sim \frac{\varphi_{\text{Newton}}}{c^2}$, später f. Analyse v. Zeitintervallen, etc.

6. Teilchen im Gravitationsfeld: erste Korrekturen zu Newton

6.1. Teilchenbahn

bisher: $\frac{d^2}{d\tau^2} \xi^\alpha(\tau) = 0$ freie Bewegg.

Ziel: Gleichg. für $\frac{d^2}{d\tau^2} x^\alpha = ?$ ableiten.

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \xi^\alpha(x^\beta(\tau)) = \underbrace{\frac{d}{d\tau}\left(\sum_\beta \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right)}_{} = 0$$

$$\sum_\beta \left\{ \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \frac{dx^\beta}{d\tau} + \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} \right) \right\} = 0 \quad \Big| \sum_\alpha \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\alpha}$$

besitzen — möchte man gern — daher

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \frac{dx^\beta}{d\tau} + \sum_{\alpha,\beta} \underbrace{\frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}}_{\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\beta} = \delta_{\gamma\beta}} \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = 0$$

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\alpha} \sum_\mu \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

$$\sum_{\beta\mu} \underbrace{\left(\sum_\alpha \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\mu} \right)}_{} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\frac{d^2 x^\gamma}{d\tau^2}}$$

Christoffelsymbol $\Gamma^{\gamma}_{\beta\mu}$

Bewegungsgleichungen f. Teilchenbahn: $$\frac{d^2 x^\gamma}{d\tau^2} = - \Gamma^{\gamma}_{\beta\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

Bemerkungen:

a) wenn Γ bekannt, so ist dies Gleichung f. $x^\gamma(\tau)$, Newton ähnlich.

b) $\exists$ Zusammenhang zwischen g und Γ:

$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{g^{\sigma\nu}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\mu\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right)$$ o. Beweis

$$g^{\sigma\nu} \cdot g_{\nu\mu} = \delta^{\sigma}_{\mu}$$ inverse Matrix definiert

c) $g_{\sigma\nu}$ entweder störungstheoretisch
oder über Einsteinfeldgleichungen