6. Zueinander gleichförmig geradlinig bewegte Koordinatensysteme: Unverträglichkeit von Newton- und Maxwellgleichungen

6.1. Galileiinvarianz der Newtonmechanik

Inertialsystem (IS): Koordinatensystem in dem die Newtongleichung in der Form $m\ddot{\vec r} = \vec f(\vec r, \dot{\vec r}, t)$ gilt, wobei $\vec f$ die eingeprägte Kraft ist

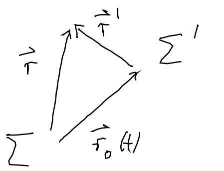
Bemerkungen:

a) es existiert das IS des Fixsternhimmels

b) nicht alle KS sind Inertialsysteme (siehe 5.)

c) es existieren beliebig viele Inertialsysteme:
können durch Experimente nicht unterschieden werden
Beschreibung ist komplett äquivalent

Konstruktion von IS aus IS d. Fixsternhimmels:



Frage: Unter welcher Bedingung ist die Newtongleichg. dieselbe in Σ und Σ', „Newtongl. ist invariant gegen $\Sigma \to \Sigma'$"

$\vec r(t) = \vec r_0(t) + \vec r\,'(t)$

$\vec r_0(t)$ kann eine konstante Verschiebung $\vec r_0 \neq 0$ oder $\vec r_0(t) = \vec v\, t$, $\vec v$ = konstant

in Σ: $m\ddot{\vec r} = \vec f$ einsetzen von $\vec r(t) = \vec r_0(t) + \vec r\,'(t)$, mit $\ddot{\vec r}_0 = 0$

in Σ': $m\ddot{\vec r}\,' = \vec f\,'$

offensichtlich ist linke Seite identisch, Kraft ist ebenso identisch, weil

Paarwechselwirkungen $\vec f(\vec r_i - \vec r_j) \to \vec f\big(\underbrace{\vec r_i - \vec r_0}_{\vec r_i\,'} - (\underbrace{\vec r_j - \vec r_0}_{\vec r_j\,'})\big) = \vec f\,'(\vec r_i\,' - \vec r_j\,')$

invariant gegen den definierten $\vec r_0$.

Die Transformation $\vec{r}(t) \to \vec{r}\,'(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_1 - \vec{v}\,t$

Konstante — gleichförmig geradlinige Verschiebung

heißt „Galileitransformation".

<u>Galileisches Relativitätsprinzip:</u>

Es gibt so viele IS die sich mit $\vec{v}$ = Konstant gegeneinander bewegen, können nicht unterschieden werden durch physikalische Experimente.

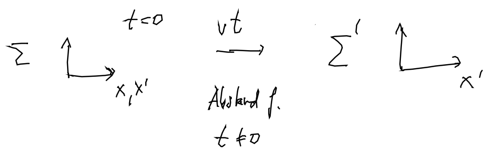
6.2. Probleme f. Maxwellgleichungen bei Galileitransformation

elektromagn. Felder genügen der Wellengleichungen: (Vakuum)

eindimensional $\left(\partial_x^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) f(x,t) = 0$ ebene Welle

Lösungen sind $f(x \pm ct)$ f. Vorwärts/Rückwärts laufende Welle

Anwendung der Galileitransformation:



$x' = x - vt$

in Σ: $f(x - ct)$ in Σ' $f(x' + vt - ct) = f(x' - \underbrace{(c-v)}_{c' \neq c}\, t)$

steht im W zu Experiment $c = c'$!

⇓ 2 Optionen: a) Elektrodynamik nicht vollständig und nicht zu Galileitrafo passend

b) Mechanik muß modifiziert werden, so daß f. beide (ED + Mech. dieselbe Trafo gilt)

Weg 6: i) finde eine Trafo $\Sigma \to \Sigma'$ die c und Maxwellgl. invariant läßt

ii) Mechanik modifizieren, also dieser neuen Trafo anpassen

iii) Grenzfall Newtonmechanik diskutieren $\left(\frac{v}{c} << 1 \right)$

erste Idee: Waldemar Voigt (1887): Zeit mit transformieren

$$x \to x', \quad t \to t' \quad \text{mit } t \neq t'$$

Vorschlag: $x' = x - vt$ und $ct' = \left(ct - \frac{v}{c} x \right)$ | physikalisch noch falsch

$$\to \underline{\underline{(x' - ct')}} = \left(x - vt - \left(ct - \frac{v}{c} x \right) \right) = \underline{\underline{(x - ct)}} \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

Forderung an Trafo: f. Wellenberge:

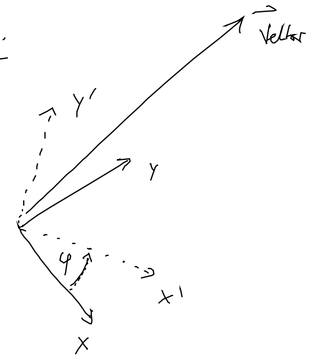
$$c = \frac{x'}{t'} = \frac{x}{t} \longrightarrow$$

wähle folgende Darstellung der Forderung: $x'^2 - c^2 t'^2 = 0 = x^2 - c^2 t^2$

6.3. Herleitung der Lorentztransformation f. Maxwellgl.

Erinnerung: Drehung von x, y-KS um z-Achse

$$x, y \to x', y'$$



Länge $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ ist invariant,

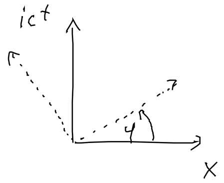
aber $x \neq x'$, $y \neq y'$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ überführt Σ, Σ' ineinander (ÜA)

Anwendung auf $x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$ ← mit $x, y \to x, y = ict = c\tau$

wenn man dies in $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ einsetzt

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(i\varphi) & \sin(i\varphi) \\ -\sin(i\varphi) & \cos(i\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix} \qquad \operatorname{tg} i\varphi = \frac{ict}{x}$$



$\varphi \to i\varphi$ folgt aus: $\frac{\sin i\varphi}{\cos i\varphi} = i\frac{ct}{x} \Leftrightarrow \frac{i \sinh\varphi}{\cosh\varphi} = i\frac{ct}{x} \Leftrightarrow \operatorname{th}\varphi = \frac{ct}{x}$

Umrechnung $\sinh / \sin$ bzw $\cosh / \cos$?

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

Was ist der Winkel φ? $x' = 0$ hat sich um $x = vt$ zur Zeit t bewegt,
wenn Σ, Σ' bei $t = 0$ einen gemeinsamen Ursprung haben

$x' = 0 \Rightarrow$ f. obere Zeile: $0 = \cosh\varphi \, x - \sinh\varphi \, ct$

$$\operatorname{th}\varphi = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c}$$

Additionstheoreme: $\cosh\varphi = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \equiv \gamma$

$$\sinh\varphi = \frac{v}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \equiv \beta\gamma = \frac{v}{c}\gamma$$

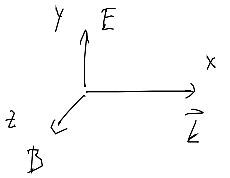
$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

Diese Transformation heißt Lorentztransformation $\quad \gamma$: Lorentzfaktor $\quad \gamma \xrightarrow{v\to c} \infty$, $\quad \gamma \xrightarrow[v \ll c]{} 1$

$$\boxed{x' = \gamma(x - vt) \quad , \quad ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right)}$$

6.4. Lorentztrafo und Maxwellgleichungen

ebene Welle



$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times B = \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E}$$

für den betrachteten Fall

$$\partial_x E = -\partial_t B \quad \text{und} \quad \partial_x B = -\frac{1}{c^2}\partial_t E$$

$$x, t \to x', t'$$

$$\partial_x = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} \quad , \quad \partial_t = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}$$

a) Galilei $\quad x' = x - vt \;,\; t = t'$

$$\partial_x = \partial_{x'} \;,\; \partial_t = -v\partial_{x'} + \partial_{t'}$$

$$\Downarrow \quad \frac{\partial}{\partial x'}\underbrace{(E - vB)}_{\equiv E'} = -\underbrace{\frac{\partial}{\partial t'} B}_{\neq B'} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x'}\underbrace{\left(B - \frac{v}{c^2}E\right)}_{B'} = -\frac{1}{c^2}\underbrace{\frac{\partial E}{\partial t'}}_{\neq E'}$$

nicht forminvariant!

b) Lorentz $\quad x' = \frac{x - vt}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$, $\quad ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$

$$\partial_x = \gamma\,\partial_{x'} - \frac{v}{c^2}\gamma\,\partial_{t'} \;, \quad \partial_t = -\gamma v\,\partial_{x'} + \gamma\,\partial_{t'}$$

Anwendg auf $\partial_x E = -\partial_t B$:

$$\left(\gamma\,\partial_{x'} - \frac{v}{c^2}\gamma\,\partial_{t'}\right)E = -\left(-\gamma v\,\partial_{x'} + \gamma\,\partial_{t'}\right)B$$, umordnen

$$\partial_{x'}\Big(\underbrace{\gamma\,(E - vB)}_{E'}\Big) = -\partial_{t'}\Big(\underbrace{\gamma\left(B - \frac{v}{c^2}E\right)}_{B'}\Big) \longrightarrow \boxed{\partial_{x'}E' = -\partial_{t'}B'}$$

Anwendg auf $\partial_x B = -\frac{1}{c^2}\partial_t E \longrightarrow \boxed{\partial_{x'}B' = -\frac{1}{c^2}\partial_{t'}E'}$

Man sieht wenn $x, ct \xrightarrow{LT} x', ct'$, so

$E, cB \to E', cB'$, denn: $\quad E' = \gamma\,(E - vB)$

$\quad cB' = \gamma\left(cB - \frac{v}{c}E\right)$

→ Maxwell-Gl. forminvariant bei LT.