

6.3.1. Externe Kavitätsmoden beim Laser + Feedback

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E} = (1 + i\alpha) n E + k e^{-iC} E(t - \tau) \quad (I)$$

τ : dimensionslos $\frac{\tau \cdot \omega_{ph}}{2\pi} = \tau$

$$\frac{dn}{dt} = \dot{n} = \gamma (j - n - (1 + 2n) |E|^2) \quad (II)$$

$\gamma \rightarrow$ Zeitskalenparameter $\frac{\tau_{ph}}{T_1} = \gamma \left(\approx \frac{1}{T} \right)$ üb.

LK-Gleichungen

C : Rückkopplungsphase $[C = \omega_0 \cdot \tau]$
 k : " " Stärke

Fixpunkte?

S^1 - Symmetrie der LK-Gleichungen

(Phasenrotation lässt Gleichungen invariant) Transformation $E \rightarrow c E$ mit $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ lässt Gleichungen invariant.

• Ansatz für stabile Lösungen (Index c)

$$E = \sqrt{I_c} e^{i(\omega_c - \omega_0)t} \quad \leftarrow \text{konstante Frequenz \& Intensität } I_c = E_c^* E_c$$

$$n = n_c \quad \leftarrow \text{konstante Inversion } [n = \tilde{n} - n_{th}]$$

ECM: External cavity mode (I_c, ω_c, n_c)

Einsetzen in (I),(II):

$$(I) \rightarrow \sqrt{I_c} i(\omega_c - \omega_0) = (1 + i\alpha) n_c \sqrt{I_c} + k e^{-iC} \sqrt{I_c} e^{-i(\omega_c - \omega_0)\tau}$$

$$(II) \rightarrow n_c = j - (1 + 2n_c) I_c$$

ω_0 : Frequenz ohne Rückkopplung
 ω_c : Mode mit Rückkopplung

Suche ω_c , welches Gleichungen erfüllt $\hat{=}$ Moden

Realteil (I) : $n_c \sqrt{I_c} + k \sqrt{I_c} \cos(\omega_c \tau) = 0$

$$\rightarrow \boxed{n_c = -k \cos \omega_c \tau}$$

↑
für $k=0$ ist $n_c=0$

d.h. Feedback wirkt je nach $\omega_c \tau$
als Verlustterm oder Verstärkung
(konstruktive oder destruktive Interferenz)

Imag.(I) : $\omega_c - \omega_0 = \alpha n_c - k \sin \omega_c \tau$

$$\boxed{\omega_c - \omega_0 = -\alpha k \cos \omega_c \tau - k \sin \omega_c \tau} \quad (*)$$

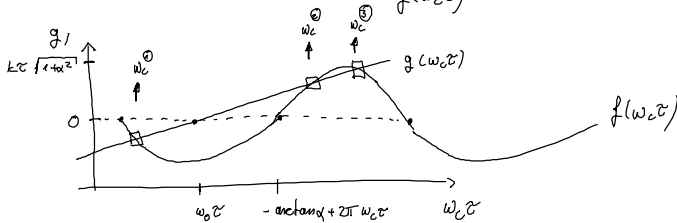
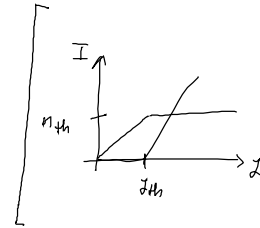
↑ Bestimmungsgleichung für Frequenz ω_c

$$(II) : \boxed{I_c = \frac{j + k \cos \omega_c \tau}{1 - 2k \cos \omega_c \tau}} = \frac{j - n_c}{1 + 2n_c}$$

Lösung von (*):

- analytisch schwierig da transzendent
- besser grafisch

$$\begin{aligned} \frac{g(\omega_c \tau)}{\tau(\omega_c - \omega_0)} &= -k\tau (\alpha \cos \omega_c \tau + \sin \omega_c \tau) \\ &= -k\tau \sqrt{1+\alpha^2} \sin(\omega_c \tau + \arctan \alpha) \end{aligned}$$



- mit k entstehen immer neue Lösungen in SN Bifurkationsraum

SN Bifurkation ist erreicht wenn Ableitung von g, f gleich sind:

$$\rightarrow \frac{\partial g}{\partial \omega_c \tau} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_c \tau} \stackrel{!}{=} 1$$

$$1 = k\tau (\alpha \sin \omega_c \tau - \cos \omega_c \tau) \quad (*)_2$$

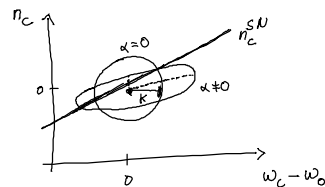
$$\frac{1}{k\tau} + \cos \omega_c \tau = \alpha \sin \omega_c \tau$$

\rightarrow Inversion n_c^{SN} an der SN-Bifurkation bestimmt über $\text{Re}, \text{Im}(I)$ mit Bedingung $(*)_2$

$$\Rightarrow 1 = \alpha (\omega_0 \tau - \omega_c \tau) + \tau n_c^{SN} + \tau n_c^{SN}$$

Sattel-Knoten Linie im Parameterraum

$$n_c^{SN} = \frac{1 + \alpha (\omega_c \tau - \omega_0 \tau)}{\tau (1 + \alpha^2)}$$



- $n_c = 0$
 $\omega_c = \omega_0$ ist stationäre Lösung ohne Feedback

Wo liegen die Lösungen ω_c im Phasenraum?

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2 + \sin^2 \\ &= \cos^2 \omega_c \tau + \sin^2 \omega_c \tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_c &= -k \cos \omega_c \tau \\ \omega_c \tau - \omega_0 \tau - \alpha \tau n_c &= -k \tau \sin \omega_c \tau \quad (\text{das ist Gl. *}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{n_c}{k}\right)^2 + \left(\frac{\omega_c \tau - \omega_0 \tau - \alpha \tau n_c}{k\tau}\right)^2$$

Fall: $\alpha = 0$

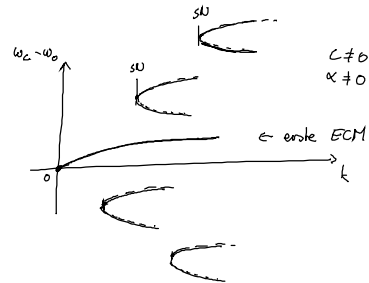
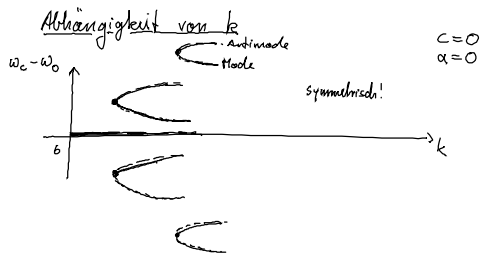
$$1 = \left(\frac{n_c}{k}\right)^2 + \left(\frac{\omega_c - \omega_0}{k}\right)^2 \quad \text{Kreisgleichung}$$

$\alpha \neq 0$

$$k^2 = (\omega_c - \omega_0)^2 + n_c^2 (1 + \alpha^2) - 2\alpha (\omega_c - \omega_0) n_c \rightarrow \text{Ellipsengleichung}$$

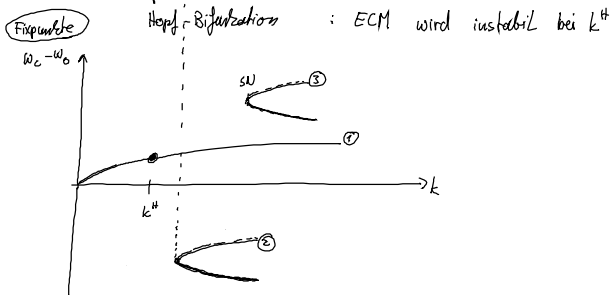
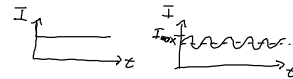
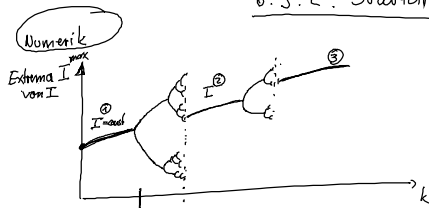
\Rightarrow Lösungen von $(*)$ liegen auf einer Ellipse im $(\omega_c - \omega_0, n_c)$ Phasenraum

- Ausdehnung wächst mit k
- α ändert die Form der Ellipse



- Multistabilität wächst mit steigendem k
- Stabilität der Lösungen wäre noch zu bestimmen

6.3.2. Stabilität der ersten ECM



Analytik Bestimmung der Hopf-Bifurkation der ersten ECM

Methoden zum Auffinden der Hopf-Bifurkation

- 1) Linearisieren \rightarrow charakt. Polynom \rightarrow Suche EW mit $\lambda = \pm i\omega$
 Problem: Delay macht Analyse schwierig \rightarrow asymptotische Entwicklung nötig

- 2) Neu:
 Bedingung an k über Existenzbedingung von period. Lösungen

Satz: Ein System $L\underline{x} = \underline{f}$ (z.B. $\dot{\underline{x}} = D(t)\underline{x} + \underline{f}$) hat genau dann eine periodische Lösung, wenn die Lösung des adjungierten ^{homogenen} Problems (hier $\dot{\underline{x}}^* = -D^T(t)\underline{x}^*$) die Bedingung $\langle \underline{x}_0^*, \underline{f} \rangle = 0$ erfüllt.

Voraussetzung: $\dot{\underline{x}} = D(t)\underline{x}$, also $L\underline{x} = 0$
hat eine periodische Lösung.

Beweis: Sei $L\underline{x} = \underline{f}$ P: Periode von \underline{x}_0 , $L\underline{x}_0 = 0$
 $L^*\underline{x}_0^* = 0$

Def.: adjungierter Operator

$$\langle \underline{x}, L\underline{y} \rangle = \langle L^*\underline{x}, \underline{y} \rangle$$

\underline{x}_0 ist Lösung des homogenen Problems

\underline{x}_0^* ist Lösung des homogenen adjungierten Problems

$$\begin{aligned} \langle \underline{x}_0^*, \underline{f} \rangle &= \int_0^P (\underline{x}_0^* \cdot \underline{f}) dt \\ &= \int_0^P (\underline{x}_0^* \cdot L\underline{x}) dt \\ &= \int_0^P (\underbrace{L^*\underline{x}_0^* \cdot \underline{x}}_0) dt = 0 \quad \square \end{aligned}$$