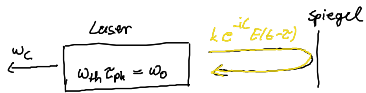


6.3.2. Stabilitätsgrenze der ersten externen Kavitätsmode beim Laser + Feedback



Beschrieben durch LK Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= (1+i\alpha)nE + k e^{-iC} E(t-\tau) \\ \dot{n} &= \mu(\frac{1}{2} - n - (1+z_n)|E|^2) \end{aligned} \quad \mu = \frac{\tau_{ph}}{T_1}$$

ω_c : Frequenz der stabilen Lösung mit Feedback
 $\omega_0 = \omega_{th, Tph}$: Frequenz des Lasers an der Schwelle

- Ziel: Bestimmung der Grenze (der Feedbackstärke) an der die erste ECM die Stabilität verliert
- Methode: Nutzen der Existenzbedingung für periodische Lösungen

$$\langle x_0^*, \frac{1}{2} \rangle = 0 \quad (\text{Voraussetzung: } x_0 \text{ ist periodisch})$$

\uparrow adjungierte homogene Lösung von $Lx = \frac{1}{2}$ \uparrow Inhomogenität

Umschreiben der LK-Gleichungen in Gleichungen für Amplitude + Phase

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{I} e^{i\phi} \\ \dot{E} &= \sqrt{I} i\dot{\phi} e^{i\phi} + \frac{1}{2} \frac{\dot{I}}{\sqrt{I}} e^{i\phi} \\ \dot{E} e^{-i\phi} &\stackrel{LK}{=} (1+i\alpha)n\sqrt{I} + k e^{-iC} \sqrt{I(t-\tau)} e^{i\phi(t-\tau) - i\phi(t)} \\ &= (1+i\alpha)n\sqrt{I} + k e^{i(-C + \Delta\phi(t-\tau) - \Delta\phi(t))} \sqrt{I(t-\tau)} = \sqrt{I} \cdot i\dot{\phi} + \frac{1}{2} \frac{\dot{I}}{\sqrt{I}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I} &= 2nI + 2k \sqrt{I(t-\tau)I(t)} \cos(\Delta\phi(t-\tau) - \Delta\phi(t) - C) \\ \dot{\phi} &= \alpha n + k \sqrt{\frac{I(t-\tau)}{I(t)}} \sin(\Delta\phi(t-\tau) - \Delta\phi(t) - C) \\ \dot{n} &= \mu(\frac{1}{2} - n - (1+z_n)I) \end{aligned}$$

Neue Variablen wie beim Einzellaser im Limit $\mu = \frac{\tau_{ph}}{T_1} \rightarrow 0$ (Class B mit sehr schwacher Dämpfung)
 (vgl. VL vom 3.12.18)



"Intensität" $y' = -(1+y)x + 2 \frac{k}{\omega_{RO}} \sqrt{(1+y)(1+y(s-\tau))} \cos(-C + \phi(s-\tau) - \phi(s))$

"Phase" $\phi' = \frac{\alpha}{2} x + \frac{k}{\omega_{RO}} \sqrt{\frac{1+y(s-\tau)}{1+y(s)}} \sin(-C + \phi(s-\tau) - \phi(s))$

"Inversion" $x' = -y - \frac{\omega_{RO}}{2j} x (1 + 2j(1+y))$

\uparrow Problem 0. Ordnung $\hat{=}$ konservatives OGL-System mit periodischer Lösung
 \uparrow Inhomogenität $\hat{=}$ Störung in 1. Ordnung in $\frac{1}{j}$

Transformation:

neue Zeit s : $t = s \cdot \omega_{RO}$

Intensität: $I = 2j + Ay$

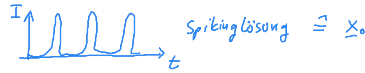
Inversion: $n = 0 + Bx$



'steady state - Wert

• Im Fall $\frac{k}{\omega_{20}} = 0 (\omega_{20})$ und $\omega_{20} \rightarrow 0$ (wegen $\sqrt{y} \rightarrow 0$) dann ist das 0. Ordnung = Problem

konservativ und hat periodische Lösungen



ABER: für $k=0$ mit $y \neq 0$ sind Lösungen gedämpft, d.h. nicht periodisch



für $k > 0$, also mit Feedback werden ROs wieder entdämpft

→ suchen k bei dem Lösungen wieder periodisch sind

1) Linearisieren des 0. Ordnungproblems (ohne Phase)

$$\delta \dot{x} = Df|_{x_0} \delta x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1+y_0(t) & x_0(t) \end{pmatrix} \delta x$$

$$\delta x = x - x_0(t) \quad \text{periodisch}$$

$$L \equiv \frac{d}{dt} \mathbb{1} - Df|_{x_0(t)}$$

adjungiertes Problem $L^* \delta x^* = 0$

$$0 = \left[-\frac{d}{dt} \mathbb{1} - \begin{pmatrix} 0 & 1+y_0 \\ -1 & x_0(t) \end{pmatrix} \right] \delta x^*$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \delta \dot{x}^* = -(1+y_0) \delta y^* \\ \delta \dot{y}^* = \delta x^* - x_0 \delta y^* \end{cases}$$

wir wissen $\langle \delta x, \delta x^* \rangle = 0$

$$\int dt (-y_0 \delta x^* + (1+y_0) x_0) \delta y^* = 0 \rightarrow \delta y^* = \frac{y_0}{1+y_0}$$

$$\delta x^* = \begin{pmatrix} x_0 \\ \frac{y_0}{1+y_0} \end{pmatrix}$$

Lösung des adjungierten Problems :

Periodizitätsbedingung aus dem Satz vom (2.1.1.)

$$\langle \delta x^*, \frac{d}{dt} \delta x \rangle = 0$$

$$\text{Einsetzen: } 0 \stackrel{!}{=} \frac{2k_H}{\omega_{20}} \int_0^P \sqrt{(1+y_0)(1+y_0(s-\bar{s}))} \cos(-c + \phi(s-\bar{s}) - \phi(s)) \frac{y_0}{1+y_0} - \frac{\omega_{20}}{2y} x_0^2 (1+2y(1+y_0)) ds$$

ein paar Näherungen für $\sqrt{\quad}$ und Taylorentwicklung des cos-Terms

$$k_H = \frac{-(1+2j)}{2T_1} \frac{1}{\cos C + \alpha \sin C}$$

$$\text{mit } \Gamma_{R0} = \frac{1+2j}{2T_1} = \gamma \frac{(1+2j)}{2}$$

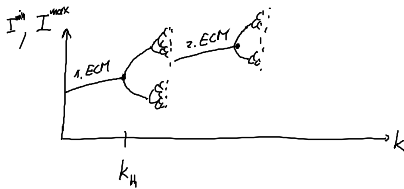
kritische
Feedbackstärke, ab der
periodische Lösungen existieren.

$$k_H = \frac{\Gamma_{R0}}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{1}{\sin(C - \arctan \alpha)}$$

Abdätzung für untere Grenze der Hopf-Bifurkation
 $\sin(C - \arctan \alpha) = 1$

$$\textcircled{*} \quad k_H \geq \frac{\Gamma_{R0}}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

- Sobald Feedback den Einfluss der RD-Dämpfung kompensieren kann wird die Lösung wieder periodisch, d.h. Laser emittiert widert mehr stabil auf der 1. ECM.
- Class A Laser sehr viel unempfindlicher gegenüber optischem Feedback (trotzdem existieren im class A Fall viele ECM Lösungen und können multistabil sein)

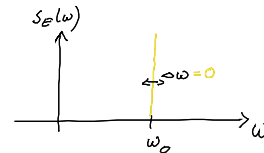


Hopf-Bifurkation gegeben durch $\textcircled{*}$ → gegeben durch Ladungsträgerdynamik und die Amplituden-Phasen Kopplg.

6.4. Bestimmung der Linienbreite eines Lasers

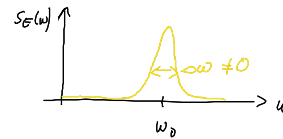
Bisher: Laser emittiert mit konstanter optischer Frequenz ω_0

E ist reelle Größe im rotating frame
Linienbreite $\Delta\omega = 0$



In Realität: Laser-emission enthält spontane Emission
d.h. Rauschen auf der E-Feld Amplitude

Frage: Welchen Einfluss hat das Rauschen auf die Linienbreite



Bekannt aus Kapitel 3:

$\textcircled{1}$ Lineare ODE mit Rauschen → Varianzmatrix $\underline{\Sigma}$ bestimbar

$$dX_t = \underline{A} X_t dt + \underline{B} dW \quad \rightarrow \quad \underline{\sigma} = \langle X_t \otimes X_t \rangle$$

↑
Wiener
Prozess

$$= \int_0^t e^{\underline{A}(t-t')} \underline{B} \underline{B}^T e^{\underline{A}(t-t')} dt'$$

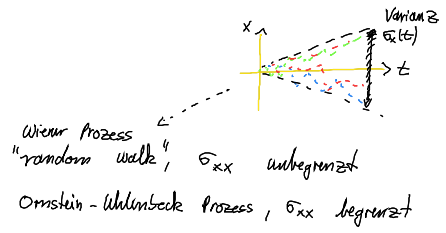
② 1. dim DGL $\dot{x} = \lambda x + b$

↑
Gauß'sches weißes Rauschen

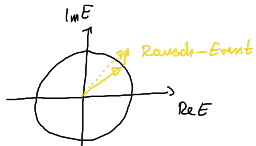
Varianz

$$\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{xx} = b^2 t$$

$$\lambda \neq 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{xx} = \frac{-b^2}{2\lambda}$$



Bsp. Laser



Amplitude ist gedämpft
Phase verhält sich wie Random Walk

\rightarrow Linienbreite $\ll \omega$

unbegrenzt durch
random walk
↓

$$\Delta\omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sigma_{\phi\phi}(t)$$

Aus Varianz der Phase kann Linienbreite berechnet werden.