

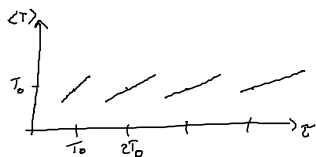
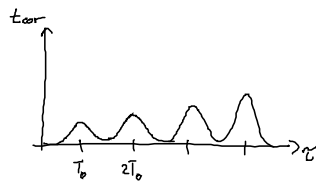
Vom der Pol Oszillator mit Rauschen + Delay

wir wissen: stochastische Dynamik charakterisierbar durch Korrelationszeit t_{cor}

- lineare SDE $t_{cor} \sim \frac{1}{\lambda}$ λ : Eigenwert der lin. homogenen Dynamik

- nichtlineare SDE mit Rauschen der Stärke D
 $\rightarrow t_{cor}(D) \neq const$

numerische Beobachtung beim Van Pol Oszillator



$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\epsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + K(y(t-\tau) - y(t)) + D\xi \end{aligned}$$

↑
nichtlineare Dämpfung

K: Rückkopplungsstärke
 D: Rauschstärke
 ω_0^2 : Eigenfrequenz

$\epsilon < 0 \rightarrow$ stabiler Fokus bei $x=y=0$

- Erläuterung durch Eigenmoden des linearisierten Systems: (ohne Rauschen)
 Suche charakteristische Gleichung:

$$\ddot{x} - \epsilon \dot{x} + \omega_0^2 x - K(\dot{x}(t-\tau) - \dot{x}(t)) = 0 \quad \text{mit Ansatz } x \sim e^{\lambda t}$$

$$\rightarrow \boxed{\lambda^2 - \lambda \epsilon + \omega_0^2 - K\lambda(e^{-\lambda\tau} - 1) = 0}$$

1. Frage: Gibt es eine Delay-induzierte Hopf-Bifurkation?

Suche $\lambda = iq$

$$\text{Re: } -q^2 + \omega_0^2 - Kq \sin q\tau = 0 \quad (1)$$

$$\text{Im: } -\epsilon + Kq(1 - \cos q\tau) = 0 \quad (2)$$

$$\rightarrow \cos q\tau = \frac{K - \epsilon}{K}$$

≤ 1 $\frac{K}{K} > 1$ ↓

\rightarrow keine Hopf-Bifurkation!

\rightarrow Oszillationen müssen ^{vom} Rauschen kommen.

2. Idee: Suche Mode des FP, die schwach stabil ist, d.h. $\lambda = p + iq$ mit $p \neq 0$
 ($p=0$ ist ausgeschlossen)

(2) $\rightarrow \cos q\tau \approx 1$
 $q\tau \approx 2\pi n \quad n \in \mathbb{N}$

$T_q = \frac{2\pi}{q} \approx \frac{\tau}{n}$ "stückweise linear in τ "
 charakteristische Frequenz im System

$q = \frac{2\pi n}{\tau} \rightarrow (1) \rightarrow q^2 = \omega_0^2 \rightarrow \tau = \frac{2\pi n}{\omega_0}$ am Maximum von τ_{cor} ist (wahrscheinlich) $p \approx 0$,

Wunsch: analytische Form für das Spektrum der Oszillationen (VdP + Rauschen)
 wäre einfach für lineare SDE (Spektrum über Wiener-Korrelation aus $\Psi(s)$)

Methode: Mean-field Näherung der VdP - Oszillation

Näherung: $\varepsilon - x^2 \approx \tilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon - \langle x^2 \rangle$

gilt für $D \ll |\varepsilon| \omega_0$
 also wenig Rauschen

$\dot{x} = y$
 $\dot{y} = \tilde{\varepsilon} y - \omega_0^2 x + D f(t)$ linear!

SDE $dx = \underline{A} x dt + \underline{B} dW(t)$

$dW_x = f(t) dt$
 $dW_y = g(t) dt$
 $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 $\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}$
 $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$

Ko-Varianz-Matrix $\underline{\Sigma}^z = \langle x(t) \otimes x(t) \rangle$
 $= \frac{D^2}{-2\tilde{\varepsilon}} \begin{pmatrix} 1/\omega_0^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

siehe VL vom 19.11.

$\langle x^2 \rangle = \Sigma_{11}^z = -\frac{D^2}{2\tilde{\varepsilon}\omega_0^2} = \frac{D^2}{-2(\varepsilon - \langle x^2 \rangle)\omega_0^2}$ selbstkonsistente Gleichung für $\langle x^2 \rangle$

$\langle x^2 \rangle^2 - \varepsilon \langle x^2 \rangle - \frac{D^2}{2\omega_0^2} = 0$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\epsilon}{2} \pm \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\epsilon^2 \omega_0^2}}$$

> 1

"+" unphysikalische Lösung da $\epsilon < 0$ und $\langle x^2 \rangle > 0$ sein muss.

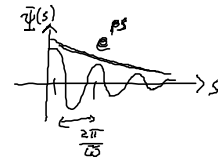
$$\Rightarrow \tilde{\epsilon} = \epsilon - \langle x^2 \rangle = \frac{\epsilon}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\epsilon^2 \omega_0^2}} \right) \quad (*)$$

$\tilde{\epsilon}$: Dämpfung des VdP Osz.
 → hängt vom Rauschen ab (nimmt mit D zu)

(EW von A $\lambda_{1,2} = p \pm i\tilde{\omega}$)

Autokorrelationsfunktion

$$\tilde{\Psi}_{yy}(s) = \langle y(t) y(t+s) \rangle = \tilde{\Psi}_{yy}(0) \operatorname{Re} e^{\lambda_1 s} \sim \tilde{\Psi}_{yy}(0) e^{ps} \cos \tilde{\omega} s$$



wobei $\lambda_{1,2} = p \pm i\tilde{\omega} = \frac{\tilde{\epsilon}}{2} \pm \sqrt{\frac{-\tilde{\epsilon}}{4} + \omega_0^2}$

$p = \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$

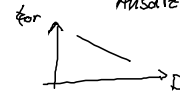
⇒ Korrelationszeit

$$t_{\text{cor}} = \frac{1}{\tilde{\Psi}_{yy}(0)} \int_0^{\infty} |\tilde{\Psi}_{yy}(s)| ds \sim \frac{2}{\pi p} \quad (\text{siehe 3.3.})$$

mit (*)

→ t_{cor} hängt ab von Rauschstärke D (durch Mean-field Ansatz für ϵ)

$$t_{\text{cor}} \sim \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{2D^2}{\epsilon^2 \omega_0^2}}}$$



Mit Kontrolle $K \neq 0$:

$$\lambda^2 - \tilde{\epsilon} \lambda + \omega_0^2 - K \lambda (e^{-\lambda \tau} - 1) = 0 \quad (\text{linearer VdP durch Mean-field Näherung})$$

unendliche viele EW $\lambda_j^e = p_j^e + i q_j^e$

Die 2 Eigenwerte $\lambda_{1,2}^e = \delta_p \pm i(1 + \delta_p) \omega_0$ mit betragsmäßig kleinster $|\delta_p|$

sind entscheidend für Empfindlichkeit bezgl. Rauschen.

$$t_{cor} = -\frac{2}{\pi \epsilon_p} \approx \frac{4}{\pi |\tilde{\epsilon}|} \left(1 + \frac{K}{2} \tau\right)$$

Beweis kommt aus
Entwicklung der EW für
 $|\epsilon_p| \ll 1$

Spektrum $S(\omega, K)$ der Dynamik des VdP durch Lösen der DGL im
Fourierraum mit Mean-field Näherung

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{x}(\omega)$$

VdP Gleichungen: (I) $-i\omega \tilde{x}(\omega) = \hat{y}(\omega)$
(II) $-i\omega \hat{y}(\omega) = \tilde{\epsilon} \hat{y}(\omega) - \omega_0^2 \tilde{x}(\omega) + D \hat{f}(\omega) + K \hat{y}(\omega) (e^{i\omega\tau} - 1)$

Eliminiere $\tilde{x}(\omega) = \frac{i}{\omega} \hat{y}(\omega)$

$$\Rightarrow -i\omega \hat{y} - \tilde{\epsilon} \hat{y} + \frac{i\omega_0^2}{\omega} \hat{y} - K(e^{i\omega\tau} - 1) \hat{y} = D \hat{f}$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{i\omega D \hat{f}(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega \tilde{\epsilon} - i\omega K(e^{i\omega\tau} - 1)} \quad (*)$$

$$(III) \quad \langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^*(\omega') \rangle = \frac{(i\omega D / (-i\omega' D) \langle \hat{f}(\omega) \hat{f}^*(\omega') \rangle) \stackrel{**}{=} [\delta(\omega - \omega')]}{(\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega[\tilde{\epsilon} + K(e^{i\omega\tau} - 1)]) (\omega'^2 - \omega_0^2 - i\omega'[\tilde{\epsilon} + K(e^{i\omega'\tau} - 1)])}$$

$$\left[\begin{aligned} \langle \hat{f}(\omega) \hat{f}^*(\omega') \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i\omega' t'} \langle f(t) f(t') \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega')t} \underbrace{\langle f(t) f(t-t') \rangle}_{\delta(t-t')} \\ &= \delta(\omega - \omega') \frac{1}{2\pi} \end{aligned} \right.$$

\Rightarrow Zurücktrafo in den Zeitraum, dann Wiener-Khinchin

$$(IV) \quad \langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^*(\omega') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i\omega' t'} \langle y(t) y(t') \rangle \quad \underline{t' = t+s}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega')t} \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i\omega'(t-s)} \langle y(t) y(t+s) \rangle$$

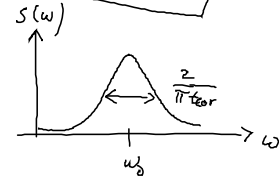
$\delta(\omega - \omega')$ (*) Re (*)

Vergleich von III & IV \Rightarrow

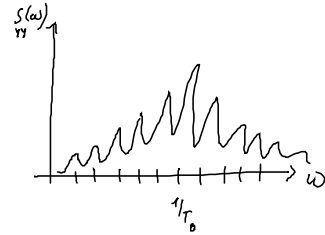
$S_{yy}(\omega)$

$$S_{yy}(\omega) = \frac{D^2}{2\pi} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2 + \omega K \sin \omega \tau)^2 + \omega^2 (\tilde{\epsilon} - K(1 - \cos \omega \tau))^2}$$

$K=0$ $S_{yy}(\omega) = \frac{D^2}{2\pi} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \tilde{\epsilon}^2}$



$K \neq 0$



Spektrum mit Maxima bei $n \cdot 1/T_0$
 \rightarrow durch Rauschen angeregte Eigenmoden.