

Fortsetzung : Linienbreite mit Feedback (6.4.2.)

- Class A Laser \rightarrow Linearisieren der Rategleichung
 - ein Eigenwert mit Eigenrichtung in Richtung der Phase ist Null $\hat{=}$ Neutrale Eigenmode

Linienbreite $\Delta\omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sigma_{\Delta\phi}^2$ [Herleitung über Autokorrelation des E-Feldes]
 \uparrow Varianz der Phasendynamik

\leftarrow Effektive Phasengleichung

$$\dot{\Delta\phi} = D \sqrt{1+\alpha^2} \frac{1}{A_c} \xi^b$$

\uparrow Rauschstärke \uparrow Amplitude im steady state \uparrow Gauß'sches Rauschen

- $\alpha=0$, Class A Laser mit Feedback

Effektive Phasengleichung durch Entwicklung des Feedback-Terms (cosinus) für Phasen nahe des steady states $\tau \dot{\Delta\phi} \approx 0$ wenn $\Delta\phi$ im rotating frame der Kavitätsmode

$$(\Delta\phi = \phi - \omega_0 t) \quad \dot{\Delta\phi} = \frac{D}{A_c} \frac{1}{1 + \tau k \cos(\omega_0 \tau)} \xi^b = \frac{D_{eff}}{A_c} \xi^b$$

ω_0 : Modenfrequenz der ECM

\rightarrow Linienbreite $\Delta\omega = \frac{D_{eff}^2}{A_c^2}$

$$\Delta\omega = \frac{D^2}{A_c^2} \frac{1}{(1 + \tau k \cos \omega_0 \tau)^2}$$

Class B Laser mit Feedback

[Mc Nam 23.1.]

$$\begin{aligned} \dot{I} &= 2uI + 2k \sqrt{I(t-\tau)I(t)} \cos(\omega_0 \phi(t-\tau) - \omega_0 \phi(t) - \omega_0 \tau) \\ \dot{\omega}_0 \phi &= \alpha n + k \sqrt{\frac{I(t-\tau)}{I(t)}} \sin(\omega_0 \phi(t-\tau) - \omega_0 \phi(t) - \omega_0 \tau) \\ \dot{n} &= \frac{\tau_{ph}}{T_1} (J - n(1 + 2u)I) \end{aligned}$$

$\omega_0 \phi = \phi - \omega_0 t$

ECM Lösung (I_c, ω_c, n_c)
 $n_c = -k \cos \omega_c \tau$

=> Phasengleichung mit Feedback

$$\dot{\Delta\phi} = \frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A_c} f^b - k \sin(\Delta\phi(t) - \Delta\phi(t-\tau) + \omega_c \tau) - \alpha k \cos \omega_c \tau$$

im steady state $\omega_c \tau$
 \downarrow
 $\Delta\phi = \phi - \omega_c \tau$

Wechsel des rotating frames zu ω_c

$$\dot{\Delta\phi} - \omega_c + \omega_0 \approx \frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A_c} f^b - k \sin(\Delta\phi(t) - \Delta\phi(t-\tau) + \omega_c \tau) - \alpha k \cos(\underbrace{\Delta\phi(t) - \Delta\phi(t-\tau)}_{\Delta\phi \tau} + \omega_c \tau)$$

klein im steady state

$$-\frac{d}{dt} \Delta\phi \approx \frac{\Delta\phi(t-\tau) - \Delta\phi(t)}{\tau}$$

$$= \frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A_c} f^b + k\sqrt{1+\alpha^2} \sin(\underbrace{-\Delta\phi(t) + \Delta\phi(t-\tau)}_{-\Delta\phi \tau} - \omega_c \tau - \arctan \alpha)$$

Entwicklung um $\omega_c \tau + \arctan \alpha$ für kleine $-\tau \Delta\phi$

$$\dot{\Delta\phi} - \omega_c + \omega_0 \approx \frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A} f^b + k\sqrt{1+\alpha^2} \sin(\omega_c \tau + \arctan \alpha) - k\sqrt{1+\alpha^2} \tau \Delta\phi \cos(\omega_c \tau + \arctan \alpha)$$

• Bestimmungsgleichung für ECH-Frequenz

$$\omega_c - \omega_0 = -k\sqrt{1+\alpha^2} \sin(\omega_c \tau + \arctan \alpha)$$

$$\Rightarrow \dot{\Delta\phi} = \frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A_c} f^b - \dot{\Delta\phi} (k\sqrt{1+\alpha^2} \tau \cos(\omega_c \tau + \arctan \alpha))$$

$$\dot{\Delta\phi} \approx \frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A_c} \frac{1}{1 + k\tau\sqrt{1+\alpha^2} \cos(\omega_c \tau + \arctan \alpha)} f^b$$

Random Walk mit veränderter Rausstärke

$$\Delta\omega = \frac{D^2(1+\alpha^2)}{A_c^2} \frac{1}{(1 + k\tau\sqrt{1+\alpha^2} \cos(\omega_c \tau + \arctan \alpha))^2}$$

• Breite der Lorentzkurve der Laseremission wird durch α vergrößert und durch Feedback bei geeigneten Delaylängen τ verkleinert.

• Voraussetzung für Herleitung: - kleine τ
 - stabile Emission auf einer Mode ω_c
 - kleine (vernachlässigbare) Fluktuationen in A_c und α_c

6.4.3 Mode-Hopping zwischen Extremum Kavitätsmoden

- Experimentell wird mode-hopping zwischen verschiedenen steady state Lösungen (ECM), also zwischen ω_c 's, beobachtet.



Kleiner Exkurs zur Fokker-Planck Gleichung

Fokker-Planck Gleichung
$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)} p + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)} p(x,t)$$

[Herleitung aus Master Gleichung mit Betrachtung der Quellen + Senken, + Markov + Taylor Entwicklung in x]

$p(x,t)$: Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße

$D^{(1)}$: Driftkoeffizient

$D^{(2)}$: Diffusionskoeffizient

1D Wahrscheinlichkeitsfluss
$$j = \left(D^{(1)} - D^{(2)} \frac{d}{dx} \right) p(x,t)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{d}{dx} j = 0$$

Stationäre Lösungen: (Randbedingungen $p \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$, $j \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$)

$\dot{p} = 0 \rightarrow j = \text{const}$

$$\rightarrow \boxed{D^{(2)} \frac{dp}{dx} = D^{(1)} p}$$

Lösung
$$p(x) = N e^{-\frac{V(x)}{D^{(2)}}}$$

mit $V(x) = - \int_{x_0}^x D^{(1)}(x) dx$

$D^{(2)}$ nicht von x -abhängig
 $D^{(1)}(x)$ ist x -abhängig

- Wahrscheinlichkeitsverteilung folgt dem Potenzial $V(x)$ ähnlich einer Boltzmann Verteilung
- $V(x)$ gegeben durch Driftkoeffizienten

Äquivalente Langevin Gleichung:
$$\dot{x} = D^{(1)} + \sqrt{2D^{(2)}} \xi(t)$$

- Zufallskraft F schiebt Teilchen im Potenzial $V(x) = - \int_{x_0}^x D^{(1)}(x) dx$ umher, anschließend Relaxation ins Gleichgewicht.

• Bsp. Lineare SDE
$$\dot{x} = ax + b \xi(t)$$

$$\rightarrow V(x) = - \int_{x_0}^x ax dx$$



• Bsp. Laser mit Feedback im rotating frame ω_0
$$\dot{\phi} = \phi - \omega_0 b$$

$$\dot{\Delta}_0 \phi = \frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A^c} f^b + k\sqrt{1+\alpha^2} \sin(\underbrace{\Delta_0 \phi(t-\tau) - \Delta_0 \phi(t) - \omega_0 \tau - \arctan \alpha}_\Delta)$$

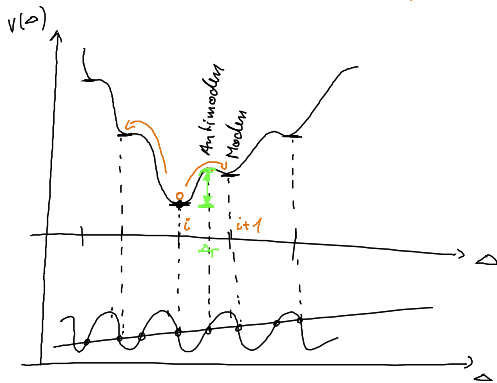
=> Einführen der Variable Δ :

$$\frac{d}{dt} \Delta = \frac{d}{dt} [\Delta_0 \phi(t-\tau) - \Delta_0 \phi(t)] = \underbrace{\frac{d}{dt} \Delta_0 \phi(t-\tau)}_{\approx \frac{\Delta}{\tau}} - \dot{\Delta}_0 \phi \approx \frac{\Delta}{\tau} - \left[\frac{\Delta}{\tau} - \frac{\Delta_0 \phi(t-\tau) - \Delta_0 \phi(t)}{\tau} \approx \frac{d}{dt} \Delta_0 \phi(t-\tau) \right]$$

$$\rightarrow -\dot{\Delta} = \frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A^c} f^b + k\sqrt{1+\alpha^2} \sin(\underbrace{\Delta - \omega_0 \tau - \arctan \alpha}_C) + \frac{\Delta}{\tau}$$

$$\dot{\Delta} = -\frac{dV(\Delta)}{d\Delta} + \underbrace{\frac{D\sqrt{1+\alpha^2}}{A^c} f^b}_{\sqrt{2D^{(2)}}}$$

mit $V(\Delta) = \frac{1}{2\tau} \Delta^2 - k\sqrt{1+\alpha^2} \cos(C+\Delta)$



• Minima von $V(\Delta)$: $\frac{dV}{d\Delta} = 0$

$$k\sqrt{1+\alpha^2} \sin(\Delta + C) + \frac{\Delta}{\tau} = 0$$

≙ Bestimmungsgleichung für ECMs
d.h. Minima entsprechen ECM-Frequenzen

Switching zwischen Potenzialköpfen kann mit Kramers-Escape berechnet werden

$$T_{i, i+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{|V''(\Delta_i) V''(\Delta_{i+1})|}} e^{-\frac{|V(\Delta_{i+1}) - V(\Delta_i)|}{2D^{(2)}}}$$

→
"Verweildauer in Mode i"

, hängt exponentiell von Barrierenhöhe und ist Maximal für Mode mit kleinster Linienbreite
 $\Delta \omega = D^{(2)}$

Ende