

1.4.3. Kolmogorov - Sinai Entropie

• aus Statistik bekannt :- Begriff der Entropie

$$I = \sum_i^m p_i \ln p_i$$

p_i : Wahrscheinlichkeit System im Zustand i zu finden

m : Zahl der Zustände

- Verallgemeinerte Information (Renyi)

$$I_q = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^m p_i^q$$

Bem.: - $q \rightarrow 1 \Rightarrow I_q = I$

- $q = 0 \Rightarrow I_0 = \ln m$

- $p_i = \text{const} \Rightarrow$ alle I_q haben gleichen Wert

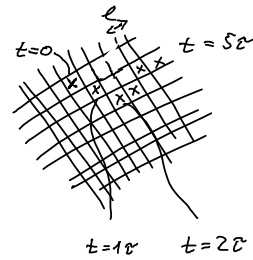
- q verändert die Wichtung der Wahrscheinlichkeiten
 $|q| > 1 \Rightarrow$ hohe p_i stärker gewichtet

- monoton fallend in q

jetzt: Übertragung auf Trajektorie

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

d : Dimension des Phasenraumes



τ : Zeitschritt

p_{i_0, \dots, i_n} : Wahrscheinlichkeit dass
 $\underline{x}(t=0)$ in Kästchen i_0
 $\underline{x}(t=1\tau)$ in " " i_1
 $\underline{x}(t=2\tau)$ " " i_2
 \vdots
 $\underline{x}(t=n\tau)$ " " i_n

$$\Rightarrow \text{Entropie } K_n = -I = - \sum_{i_0, \dots, i_n} p_{i_0, \dots, i_n} \ln p_{i_0, \dots, i_n}$$

↑

Information, die zur Vorhersage einer Trajektorie fehlt

Informationsverlust beim Zeitschritt $t_n \rightarrow t_{n+1}$: $K_{n+1} - K_n$

Definition: Kolmogorov - Sinai Entropie

$$K = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\varepsilon} \sum_{n=0}^{N-1} (K_{n+1} - K_n)$$

$$K = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\varepsilon} \sum_{i_0, \dots, i_N} P_{i_0, \dots, i_N} \ln P_{i_0, \dots, i_N}$$

W. für eine Trajektorie der Länge $N\varepsilon$

Anwendung auf dynamische Systeme

1) reguläre Bewegung

$$P_{i_0 i_1} = 1 \cdot P_{i_0} = P_{i_0}$$

$\rightarrow - \sum_{i_0, \dots, i_N} P_{i_0, \dots, i_N} \ln P_{i_0, \dots, i_N}$ ist unabhängig

von $N \rightarrow \boxed{K=0}$

kein Informationsverlust

2) chaotische Bewegung

$$P_{i_0 i_1} = e^{-\lambda \varepsilon} P_{i_0}$$

λ : Lyapunov Exponent

($P_{i_0} = 1$)

\hookrightarrow benachbarte Punkte werden exp. getrennt

$$P_{i_0, \dots, i_N} = e^{-\lambda \varepsilon N} \cdot P_{i_0} \rightarrow \underbrace{- \sum_{i_0, \dots, i_N} P_{i_0, \dots, i_N}}_{\text{normiert}} \underbrace{\ln P_{i_0, \dots, i_N}}_{-\lambda \varepsilon N} = N \lambda \varepsilon$$

$\rightarrow \boxed{K = \lambda}$

Bem: K ist gemittelte Summe der positiven Lyapunov Exponenten

$$K = \int d^d x \rho(x) \sum_i \lambda_i^+(x)$$

Dichte im Phasenraum

3) Stochastische (zufällige Bewegung)

• jedes Kästchen gleichwahrscheinlich

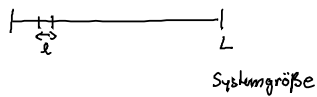
$P_{i_0} = 1$

$$P_{i_0 i_1} = \frac{l^d}{V} \ll 1$$

$$\underbrace{- \sum_{i_0, \dots, i_N} P_{i_0, \dots, i_N}}_{\text{normiert}} \underbrace{\ln P_{i_0, \dots, i_N}}_{\ln \frac{l^d}{V}} \sim \ln \frac{1}{l}$$

$l \rightarrow 0 \Rightarrow \boxed{K \rightarrow \infty}$

Bemerkung: K -Entropie bestimmt mittlere Zeit T_m für die der Zustand des Systems vorhersagbar ist.

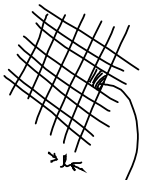


$$L \sim l e^{\lambda t}$$

$$T_m \sim \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

$$T_m \sim \frac{1}{K} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

1.4.4. Bestimmung der fraktalen Dimension eines chaotischen Attraktors



$$P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}$$

N_i : Zahl der Punkte $x(t=j\tau)$ im Kästchen i

N : Zahl der Zeitschritte

nach N Zeitschritten
 N_i mal besucht

Verallgemeinerte Dimension

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{q-1}$$

$$\frac{\ln \left(\sum_{i=1}^{M(l)} (P_i)^q \right)}{\ln l}$$

$i=1, \dots, M(l)$

Punkte auf dem
Attraktor

(sonst $P_i=0$)

$q=0$

$q=1$

$q=2$

$$D_0 = - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln M(l)}{\ln l}$$

$$D_1 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{-I(l)}{\ln l}$$

$$D_2 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum \ln P_i^2}{\ln l}$$

Hausdorff
Dimension

Informations-
Dimension

$$I(l) = \sum_{i=1}^{M(l)} P_i \ln P_i$$

Korrelations-
dimension

Verallgemeinerte Entropierate

$$K_q = - \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q-1} \frac{1}{n} \ln \sum_{i_0 \dots i_n} P_{i_0 \dots i_n}^q$$

$q=1 \rightarrow$ liefert Kolmogorov-Sinai Entropie

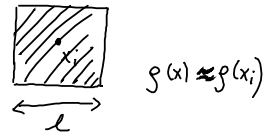
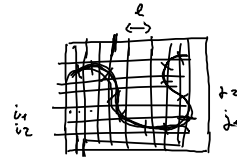
Verbindung zwischen K_q, D_q für tatsächliche Diskretisierung auf der Zeitserie?

- nicht regelmäßige Einteilung des Phasenraumes sondern Trajektorie zerlegen.

$$\sum_i p_i^q = \sum_i \left[\int_{\text{Kästchen } i} g(x) d^d x \right]^q$$

↑
Summe über alle Punkte der Diskretisierung

$$\approx \sum_i [g(x_i) l^d]^q$$



$$= \sum_i g(x_i) l^d \underbrace{[g(x_i) l^d]^{q-1}}_{\tilde{p}_i}$$

$$\approx \int g(x) \tilde{p}(x)^{q-1} d^d x$$

↑ wird auf Trajektorie diskretisiert, sonst $g(x)=0$
 ↑ x ist auf dem Attraktor

$$\sum_i p_i^q \approx \frac{1}{N} \sum_i [\tilde{p}(x_i)]^{q-1} \quad (1)$$

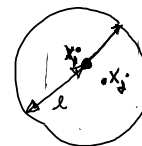
x_i Punkte auf Trajektorie

Summe über Punkte auf dem Attraktor

für spezielle zeitliche Dynamik kann p_i berechnet werden durch

$$\tilde{p}_i = \frac{1}{N} \sum_j \Theta(l - |x_i - x_j|)$$

Θ : Heaviside Funktion



• relativ gut numerisch zu berechnen

$\hat{=}$ Wahrscheinlichkeit zwei Punkte im Kästchen l zu finden

$$\sum_i p_i^{q=2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Theta(l - |x_i - x_j|) \right)^2 = C_2(l)$$

Korrelationssignal

angewendet auf Entropierate:

$$K_q = - \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q-1} \frac{1}{n} \sum_{i_0 \dots i_n} p_{i_0 \dots i_n}^q$$

$$C_n^q(l) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Theta \left(l - \sqrt{\sum_{m=0}^n (x_{i+m} - x_{j+m})^2} \right) \right]^{q-1}$$

↑
verallgemeinertes
Korrelationssignal

$$\begin{matrix} x_{i+2} \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_{j+2} \end{matrix}$$

Es gilt

- $C_{n=0}^q(l) = C_q(l)$

Für kleine l gilt:

- $\ln C_n^q(l) = (q-1) D_q \ln l + \underbrace{n(q-1) K_q}_{*^2}$

