1.4.3. Kolmogorov – Sinai Entropie

- aus Statistik bekannt: - Begriff der Entropie $\boxed{I = \sum_i^m p_i \ln p_i}$

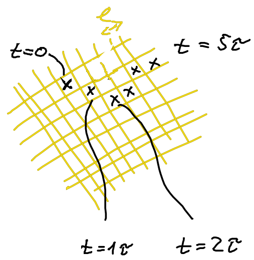
  p_i: Wahrscheinlichkeit System im Zustand i zu finden

  m: Zahl der Zustände

  - Verallgemeinerte Information (Renyi) $\boxed{I_q = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^{m} p_i^q}$

  Bem.: - $q \to 1 \Rightarrow I_q = I$
  - $q = 0 \Rightarrow I_0 = \ln m$
  - $p_i = \text{const} \Rightarrow$ alle I_q haben gleichen Wert
  - q verändert die Wichtung der Wahrscheinlichkeiten
    $|q| > 1 \Rightarrow$ höhe p_i stärker gewichtet
  - monoton fallend in q

Jetzt: Übertragung auf Trajektorie $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ d: Dimension des Phasenraumes



$p_{i_0 \dots i_n}$: Wahrscheinlichkeit dass
$\underline{x}(t=0)$ in Kästchen i_0
$\underline{x}(t=1\cdot\tau)$ in " i_1
$\underline{x}(t=2\tau)$ " " i_2
$\vdots$
$\underline{x}(t=n\cdot\tau)$ i_n

τ : Zeitschritt

$\Rightarrow$ Entropie $K_n = -I = -\sum_{i_0 \dots i_n} p_{i_0 \dots i_n} \ln p_{i_0 \dots i_n}$

↑ Information, die zur Vorhersage einer Trajektorie fehlt

Informationsverlust beim Zeitschritt $t_n \to t_{n+1}$: $K_{n+1} - K_n$

Definition: Kolmogorov - Sinai Entropie

$$K = \lim_{\tau \to 0} \lim_{l \to 0} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{n=0}^{N-1} (K_{n+1} - K_n)$$

$$\boxed{K = - \lim_{\tau \to 0} \lim_{l \to 0} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{i_0, \dots, i_N} P_{i_0 \dots i_N} \ln P_{i_0 \dots i_N}}$$

W. für eine Trajektorie der Länge $N\tau$

Anwendung auf dynamische Systeme

1) reguläre Bewegung

$P_{i_0 i_1} = 1 \cdot P_{i_0} = P_{i_0}$ $\quad \to \quad -\sum_{i_0 \dots i_N} P_{i_0 \dots i_N} \ln P_{i_0 \dots i_N}$ ist unabhängig von N $\to$ $\boxed{K = 0}$

kein Informationsverlust

2) chaotische Bewegung

λ: Lyapunov Exponent

$P_{i_0 i_1} = e^{-\lambda\tau} P_{i_0}$ $\qquad (P_{i_0} = 1)$

↳ benachbarte Punkte werden exp. getrennt

$$P_{i_0 \dots i_N} = e^{-\lambda\tau N} \cdot P_{i_0} \quad \to \quad \underbrace{-\sum_{i_0 \dots i_N} P_{i_0 \dots i_N}}_{\text{normiert}} \underbrace{\ln P_{i_0 \dots i_N}}_{-\lambda\tau N} = N\lambda\tau$$

$\to \boxed{K = \lambda}$

Bem: K ist gemittelte Summe der positiven Lyapunov Exponenten

$$K = \int d^d x \, \rho(x) \sum_i \lambda_i^+(x)$$

$\rho(x)$: Dichte im Phasenraum

3) Stochastische (zufällige Bewegung)
- jedes Kästchen gleichwahrscheinlich

$P_{i_0 i_1} = \frac{l^d}{V} \ll 1$ $\qquad P_{i_0} = 1$

$$\underbrace{-\sum_{i_0 \dots i_N} P_{i_0 \dots i_N}}_{\text{normiert}} \underbrace{\ln P_{i_0 \dots i_N}}_{\ln \frac{l^d}{V}} \sim \ln \frac{1}{l}$$

$l \to 0 \Rightarrow \boxed{K \to \infty}$

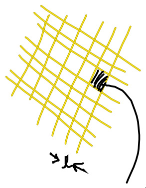
Bemerkung: K-Entropie bestimmt mittlere Zeit T_m für die der Zustand des Systems vorhersagbar ist.

$L \sim \ell e^{\lambda t}$

$T_m \sim \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{\ell}\right)$

$T_m \sim \frac{1}{K} \ln\left(\frac{1}{\ell}\right)$

1.4.4. Bestimmung der fraktale Dimension eines chaotischen Attraktors



nach N Zeitschritten N_i mal besucht

$$P_i = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N}$$

N_i : Zahl der Punkte $\underline{x}(t = j\tau)$ im Kästchen i

N : Zahl der Zeitschritte

Verallgemeinerte Dimension

$$D_q = \lim_{\ell\to 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{M(\ell)} (P_i)^q\right)}{\ln \ell}$$

$i = 1, \dots M(\ell)$ Punkte auf dem Attraktor (sonst $P_i = 0$)

$q = 0$ $\qquad$ $q = 1$ $\qquad$ $q = 2$

$$\boxed{D_0 = -\lim_{\ell\to 0} \frac{\ln M(\ell)}{\ln \ell}} \qquad \boxed{D_1 = \lim_{\ell\to 0} \frac{-I(\ell)}{\ln \ell}} \qquad \boxed{D_2 = \lim_{\ell\to 0} \frac{\sum \ln P_i^{\,2}}{\ln \ell}}$$

Hausdorf Dimension

Informations-Dimension $\quad I(\ell) = \sum_{i=1}^{M(\ell)} P_i \ln P_i$

Korrelations-dimension

Verallgemeinerte Entropierate

$$K_q = -\lim_{\ell\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q-1} \frac{1}{n} \ln \sum_{i_0 \dots i_n} P_{i_0 \dots i_n}^{\;q}$$

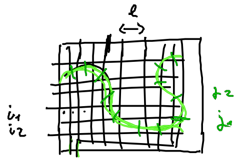
$q = 1 \longrightarrow$ liefert Kolmogorov-Sinai Entropie

Verbindung zwischen K_q / D_q für tatsächliche Diskretisierung auf der Zeitserie?

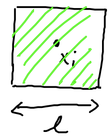
– nicht regelmäßige Einteilung des Phasenraumes sondern Trajektorie zerteilen.

$$\sum_i p_i^q = \sum_i \left[\int_{\substack{\text{Kästchen } i \\ \ell^d}} \rho(x)\, d^d x \right]^q$$

Summe über alle Punkte der Diskretisierung

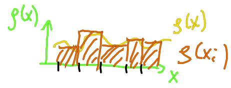


$$\approx \sum_i \left[\rho(x_i)\, \ell^d \right]^q$$



$\rho(x) \approx \rho(x_i)$

$$= \sum_i \rho(x_i)\, \ell^d \Big[\underbrace{\rho(x_i)\, \ell^d}_{\tilde{P}_i} \Big]^{q-1}$$



$$\approx \int \rho(x) \cdot \tilde{P}(x)^{q-1}\, d^d x$$

x ist auf dem Attraktor

wird auf Trajektorie diskretisiert, sonst $\rho(x) = 0$

$$\boxed{\sum_i p_i^q \approx \frac{1}{N} \sum_j \left[\tilde{P}(x_j) \right]^{q-1}} \quad (1)$$

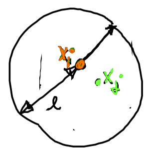
x_j: Punkte auf Trajektorie

Summe über Punkte auf dem Attraktor

für spezielle zeitliche Dynamik kann P_j berechnet werden durch

$$\tilde{P}_j = \frac{1}{N} \sum_i \Theta(\ell - |x_i - x_j|)$$

Θ: Heavyside funktion



- relativ gut numerisch zu berechnen

$\hat{=}$ Wahrscheinlichkeit zwei Punkte im Kästchen ℓ zu finden

$$\sum_i p_i^{q=2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \Theta(\ell - |x_i - x_j|) \right)^1 = C_2(\ell)$$

Korrelationssignal

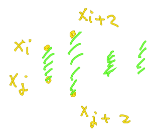
angewendet auf Entropierate:

$\circledast^2$

$$K_q = -\lim_{\ell\to 0}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q-1}\,\frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i_0 \ldots i_n} P_{i_0 \ldots i_n}^{\,q}}$$

$$C_n^q(\ell) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Theta\left(\ell - \sqrt{\sum_{m=0}^{n}\left(x_{i+m} - x_{j+m}\right)^2}\right)\right]^{q-1}$$

verallgemeinertes Korrelationssignal



Es gilt

- $C_{n=0}^{q}(\ell) = C_q(\ell)$

Für kleine ℓ gilt:

- $$\ln C_n^q(\ell) = (q-1)\, D_q \ln \ell + \underbrace{n(q-1)\, K_q}_{*^2}$$