Zusammenfassung - Delay Systeme

- Phasenraum hochdimensional
- charakteristische Gleichung transcendent $\rightarrow$ Lösung über ① Lambert W-Funktion
  ② numerisch
  ③ analytische Lösung entlang bestimmter Bifurkationskurven (z.B. Hopf-Kurve $\Lambda = rq$)

- Stabilisierung ① von instab. Fokus : $\tau = \frac{T_0}{2} + nT_0 \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$
  (durch Pyragas Kontrolle)
  es existiert minimale Rückkopplungsstärke für Stabilisierung

  ② von Grenzzyklen : $\tau = T_0$
  Stabilisierung durch transkritische Bifurkation

- Reappearance : "Wiederauftauchen" von periodischen Lösungen der ODE bei Vielfachen der Periode + Delay : d.h. bei $\tau_n = \tau_0 + nT_0 \qquad n \in \mathbb{N}$

  (T_0: Periode der Lösung gefunden bei τ_0)

  . finde identische Lösung (mit T_0) bei τ_n (Stabilität kann wechseln)

---

3. Stochastische dynamische Systeme

Bisher : deterministische dynamische Systeme (durch AB eindeutig für alle t bestimmt)

Jetzt : stochastische (zufällige) Prozesse

3.1. Stochastische Prozesse

Zeitentwicklung einer Zufallsvariablen $X(t)$

($\leftrightarrow$ im thermodynamischen Gleichgewicht zeitunabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Jayne'sches Prinzip der vorurteilsfreien Schätzung gegeben)

Verbundwahrscheinlichkeit zeitabhängig : $p(x_1,t_1; x_2,t_2; x_3,t_3 \ldots\ldots)$

x_1, x_2, x_3 Realisierungen von $X(t)$

Markoff - Prozess

$$p(x_1,t_1 | \overbrace{x_2,t_2, x_3,t_3 \ldots}^{\text{Historie}}) := \frac{p(x_1,t_1; x_2,t_2; \ldots)}{p(x_2,t_2)\, p(x_3,t_3) \ldots}$$

bedingte Wahrscheinl.

$\hat{=} \; p(x_1,t_1 \mid x_2,t_2)$ hängt nur vom letzten Schritt ab

$t_1 \geq t_2 \geq t_3 \; \ldots$ kein Gedächtnis!

Langevin-Gleichung

fluktuierende stochastische Kraft $\xi(t)$ $\hat{=}$ Rauschen

z.B. Brown'sche Bewegung (1827)

$$m\ddot{x} = \underbrace{-\eta \dot{x}}_{\text{Reibung}} + \underbrace{\xi(t)}_{\text{Rauschen}}$$

Gauß'sches weißes Rauschen

$\langle \ldots \rangle$ = statistische Mittelung

$$\langle \xi(t) \rangle = 0$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t') \quad \text{unkorreliert}$$

[zentraler Grenzwertsatz: unkorrelierte Zufallsvar. gehorchen einer Gauß-Verteilung]

Autokorrelations-funktion

$$\Psi(s) := \langle (x(t) - \langle x \rangle)(x(t+s) - \langle x \rangle) \rangle$$

ergodische Systeme: Ensemblemittel = Zeitmittel

$$\Psi(s) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \; x(t)\, x(t+s) \qquad (\text{hier } \langle x \rangle = 0)$$

Fourier-Trafo: $\hat{x}(\omega,T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} dt \, e^{i\omega t} x(t)$ in $t \in [-T,T]$

Spektrale Leistungsdichte (power-spectral density)

$$S(\omega) := \lim_{T\to\infty} \frac{\pi}{T} |\hat{x}(\omega,T)|^2$$

oder

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)\, x(t+s) \rangle e^{i\omega s} \, ds$$

Wiener-Khinchin-Theorem

z.B. Anwendung auf Gauß'sches Rauschen $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) e^{i\omega s} ds = \frac{1}{2\pi} = \text{const}$

3.2. Stochastische Differentialgleichungen (SDE)

Gegeben sei ein dynamisches System mit Rauschen

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t) + b(x,t)\,\xi(t)$$

$\xi(t)$: Gauß'sches weißes Rauschen

Problem: - durch Rauschen sind Trajektorien $x(t)$ nicht mehr differenzierbar

- $x(t)$ ist Zufallsvariable $\longrightarrow$ $\frac{dx}{dt}$ nicht wohldefiniert

$\Rightarrow$ Umschreiben in Differentialoperatoren

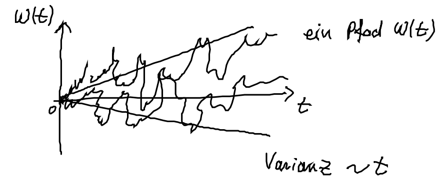
$$\boxed{\text{SDE}} \qquad dx = a(x,t)\,dt + b(x,t)\,dW(t)$$

wobei $dW(t) = \xi(t)\,dt$

$\boxed{\text{"Wiener Prozess"}}$ mit Pfad $W(t) = \int_0^t \xi(t')\,dt'$

kann ~~formal~~ integriert werden

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt'\,a(x,t') + \int_{t_0}^{t} dW(t')\,b(x,t')$$



Bem: keine explizite Lösung, da $a(x,t)$ von x abhängt

$\rightarrow$ keine analytische Lösung möglich

ABER: Mittelwerte und Varianz können berechnet werden!

Varianz: $\langle (x(t) - \langle x\rangle)(x(t) - \langle x\rangle)\rangle = \Psi(0) = \sigma_x^2$

1 am Bspiel eines 1-dim Systems $x \in \mathbb{R}$: sei $a = 0$, $b = const$ d.h. reiner Wiener Prozess (Random Walk)

Mittelwert:
$$\langle x\rangle = \left\langle b\int_{t_0}^{t} dW(t')\right\rangle$$
$$= \left\langle b\int_{t_0}^{t} \xi(t')\,dt'\right\rangle = 0 \qquad \text{(da Gauß'sches Rauschen)}$$

$\langle \xi(t)\rangle = 0$

Varianz
$$\langle x(t)\,x(t)\rangle = \left\langle b^2 \int_{t_0}^{t} dW(t')\cdot\int_{t_0}^{t} dW(t'')\right\rangle$$

$\delta(t-t') = \langle \xi(t)\,\xi(t')\rangle \rightsquigarrow$
$$= b^2\int_{t_0}^{t} dt' = \boxed{b^2(t - t_0)}$$

Varianz steigt linear mit zeitlichen Abweichung vom Startwert

$\boxed{2}$: 1-dim
$b = \text{const}$
$a(x) = a \cdot x$ d.h. lineare stochastische DGL

$\Rightarrow dx = a \cdot x \, dt + \underbrace{b \, dW}_{\text{Inhomogenität der DGL}}$

1) homogene Lösung finden zu $\dot{x} = a x$
Fundamentalsystem $x^H(t) = e^{at}$

2) Ansatz für inhomogene Lösung zu $\dot{x} = ax + b\xi$

$x^I = c(t) \, x^H$ (Variation der Konstanten)

einsetzen in DGL:
$$\dot{c} x^H + c \dot{x}^H = a c x^H + b\xi$$
$$\dot{c} x^H + c \cdot a x^H = a c x^H + b\xi$$
(1) $$\dot{c} x^H = b\xi$$

Nebenrechnung
Suchen $x^H x^{H*} = 1$
x^{H*} ist eine Lösung zur adjungierten DGL
$$-\dot{x}^* = a^* x^*$$
hier $x^{H*} = e^{-at}$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\dot{c} = b\xi x^{H*}$

$$\rightarrow \boxed{c(t) = \int_{t_0}^{t} b \, \xi(s) \, x^{H*}(s) \, ds}$$ für $x^I = c(t) \, x^H$

allgemeine Lösung von SDE $dx = a x \, dt + b dW$ ist

$$\boxed{x(t) = x^H(t) \cdot x_0 + x^H(t) \cdot c(t)}$$ stochastische Zufallsvariable

AB

• Mittelwert von $x(t)$: $\langle x \rangle = \langle x_0 \cdot x^H \rangle + \langle c(t) \, x^H \rangle$
$$= e^{at} \left(\langle x_0 \rangle + \langle c(t) \rangle \right)$$
$$= e^{at} \left(\langle x_0 \rangle + \langle \int_0^t b \, \xi(t') \, e^{-at'} dt' \rangle \right)$$

geht gegen Null für $t \to \infty$, $(a < 0)$

$$\underline{\underline{= 0}} \quad \text{für } t \to \infty$$

- Varianz von $x(t)$: $\langle x(t)\, x(t) \rangle = \Psi(0)$

x_0 : Startwert
$x(t_0) = x(0)$

$$\Psi(s) = \langle x(t)\, x(t+s) \rangle$$

$$= \left\langle \left(x_0 e^{at} + c(t) e^{at} \right) \left(x_0 e^{a(t+s)} + c(t+s)\, e^{a(t+s)} \right) \right\rangle$$

$$= \underbrace{\left\langle x_0^2\, e^{2at+as} \right\rangle}_{\substack{\to 0 \\ \text{mit } e^{2at}}} + \underbrace{\left\langle 2\, c(t) \left(e^{2at+as}\, x_0 \right) \right\rangle}_{\substack{\to 0 \\ \text{mit } e^{2at}}} + \left\langle c(t)\, c(t+s)\, e^{2at+as} \right\rangle$$

$\Downarrow$

weiter am Mo!

$\vdots$

$$\Psi(s) = \frac{b^2}{-2a}\, e^{as}$$