Fortsetzung, Herleitung der Lasergrundgleichungen

Wellengleichung für komplexe Amplitude E_λ einer Mode λ

$$(\mathrm{I}) \quad \omega_\lambda^2 E_\lambda + \ddot{E}_\lambda + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\dot{E}_\lambda = -\frac{1}{\varepsilon_0}\ddot{P}_\lambda$$

mit Modenansatz

$$\underline{E}(\underline{x},t) = \sum_\lambda E_\lambda(t)\, \underline{e}_\lambda\, u(\underline{x})$$

und

$$P_\lambda = \int u_\lambda(x)\, \underline{e}_\lambda\, \underline{P}(x,t)\, d\underline{x}$$

Polarisation des Mediums wird berechnet über Dipoldichte

mikroskopisch $\quad \tilde{p}(t) = \langle -e\underline{r} \rangle = -\left(p(t)\underline{\mu}_{12} + p^*(t)\underline{\mu}_{12}^* \right)$

dimensionslose Polarisation $\qquad$ statisches Dipolmoment $\underline{\mu}_{12}$

makroskopisch $\quad \underline{P}(\underline{x},t) = \sum_i \delta(\underline{x}-\underline{x}_i)\, \tilde{p}_i(t)$

Summe über alle Atome

die mikroskopische dimensionslose Polarisation ist gegeben: $\quad p(t) = c_1^*(t)\, c_2(t)\, e^{-i\bar{\omega}t} \quad (*)$

E_2 $\quad \updownarrow \hbar\bar{\omega}$
E_1

Lösung des statischen Problems

$(\psi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)$

Wellenfunktion mit Licht-Materie WW

wobei aus Schrödingergleichung folgt

$$\dot{c}_1 = \frac{1}{i\hbar} c_2\, \underline{\mu}_{12}\, \underline{E}(t)\, e^{-i\bar{\omega}t}$$

$$\dot{c}_2 = \frac{1}{i\hbar} c_1\, \underline{\mu}_{21}\, \underline{E}(t)\, e^{i\bar{\omega}t} \qquad (\mathrm{II})$$

$\underline{\mu}_{12} = \underline{\mu}_{21}^*$

Bewegungsgleichung für $p(t)$

$$\frac{d}{dt}p(t) \overset{(*)}{=} -i\bar{\omega}p + c_1^*\dot{c}_2\, e^{-i\bar{\omega}t} + \dot{c}_1^* c_2\, e^{-i\bar{\omega}t}$$

$$\overset{(\mathrm{II})}{=} -i\bar{\omega}p + \frac{1}{i\hbar}|c_1|^2\, \underline{E}(t)\, \underline{\mu}_{21}\, e^{i\bar{\omega}t - i\bar{\omega}t} - \frac{1}{i\hbar}|c_2|^2\, \underline{E}(t)\, \underline{\mu}_{12}^*\, e^{i\bar{\omega}t - i\bar{\omega}t}$$

$$= \underbrace{-i\bar{\omega}p}\; - \frac{1}{i\hbar}\underline{E}(t)\underline{\mu}_{21}\underbrace{\left[|c_2|^2 - |c_1|^2 \right]}$$

- Dynamik der Polarisation ohne WW ist ungedämpfter Oszillator $p \sim e^{-i\bar{\omega}t}$

Inversion eines Atoms d $\qquad |c_2|^2$ Besetzungswahrsch. für E_2
$\qquad |c_1|^2$ $\quad$ " $\quad$ für E_1

• bisher nicht betrachtet: Dämpfung von p durch Stöße oder ~~Elektron-Elektron~~-WW oder WW mit Phononen

$\longrightarrow T_2$ Zeit, Lebensdauer der Polarisation

phänomenologischer Ansatz $\boxed{\dot{p} = -\gamma p}$ $\qquad \gamma = \gamma_0 + \frac{1}{T_2}$

kaum mit mikroskop. Theorie berechnet werden $\qquad$ pure dephasing

$$\boxed{\dot{p} = -i\bar{\omega} p - \gamma p - \frac{1}{i\hbar}\underline{E}(t)\underline{\mu}_{21}\, d} \qquad (\mathrm{III})$$

Osz. $\qquad$ Dämpfung $\qquad$ WW mit Licht

$$\boxed{d = |c_2|^2 - |c_1|^2}$$

$$\dot{d} = c_2^* \dot{c}_2 - c_1^* \dot{c}_1 + \dot{c}_2^* c_2 - \dot{c}_1^* c_1$$

$$\left[\, E \overset{(\mathrm{II})}{\longleftarrow} p \longleftrightarrow d,\quad E \xrightarrow[(\mathrm{III})]{} p \,\right]$$

Gleichung für d benötigt!

$$\left[\, p = c_1^* c_2 e^{-i\bar{\omega}t} \,\right]$$

$$\dot{d} \overset{(\mathrm{II})}{=} \frac{\underline{E}(t)}{i\hbar}\Big(\underline{\mu}_{21} c_1 c_2^* e^{i\bar{\omega}t} - \underline{\mu}_{21}^* c_1^* c_2 e^{-i\bar{\omega}t} - \underline{\mu}_{12} c_1^* c_2 e^{-i\bar{\omega}t} + \underline{\mu}_{12} c_1 c_2^* e^{i\bar{\omega}t}\Big)$$

$$\dot{d} = \frac{2}{i\hbar}\underline{E}(t)\left(\underline{\mu}_{12}^* p^* - \underline{\mu}_{12} p\right)$$

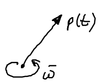
• WW der Atome mit Umgebung (Pumpen oder strahlungslose Relaxation) noch nicht berücksichtigt

-> phänomenologisch $\dfrac{d_0 - d}{T_1}$

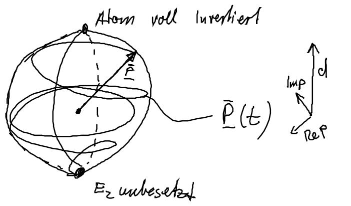
$$\boxed{\dot{d} = \frac{2}{i\hbar}\underline{E}(t)\left(\underline{\mu}_{12}^* p^* - \underline{\mu}_{12} p\right) + \frac{d_0 - d}{T_1}} \qquad (\mathrm{IV})$$

Gleichung (III) und (IV) sind identisch mit den Bloch'schen Gleichungen für einen Elektronenspin mit Magnetfeld $\underline{H}(t)$

Polarisation $\hat{=}$ „Spin"



Präzession der Pol.



Variation von $\underline{P}$ durch äußeres Feld mit Rabi-Frequenz

$$\Omega = \omega_R = \frac{E\,\mu_{21}}{\hbar}$$

5.2. Näherungen der Laser-Grundgleichungen

- Rotating wave approximation (RWA)
- Slowly varying amplitude approximation (SVA)

$$\underline{P}(x,t) = \sum_i \delta(x-x_i) \overbrace{\left(\rho_i(t)\underline{\mu}_{12} + \rho_i^*(t)\underline{\mu}_{12}^*\right)}^{\tilde{\rho}_i}$$

$$\underline{P}(x,t) = \underbrace{\underline{P}^{(+)}}_{\sim e^{-i\bar{\omega}t}}(x,t) + \underbrace{\underline{P}^{(-)}}_{e^{i\bar{\omega}t}}(x,t)$$

Die makroskopischen Gleichungen sehen wie folgt aus:

① $$\frac{\partial}{\partial t}\underline{p}^{(+)} = (-i\bar{\omega} - \gamma)\,\underline{p}^{(+)} + \frac{1}{i\hbar}\left(\underline{E}\,\underline{\mu}_{21}\right)\underline{\mu}_{12}\, D$$

makroskop. Inversion

② $$\frac{\partial}{\partial t} D = \frac{D_0 - D}{T_1} - \frac{2}{i\hbar}\underbrace{\underline{E}\left(\underline{p}^{(-)} - \underline{p}^{(+)}\right)}_{\text{Term A}}$$

③ Wellengleichung (I)

Zerlegung der Modenamplituden E_λ : $E_\lambda = E_\lambda^{(+)} + E_\lambda^{(-)}$

$$E_\lambda^{\pm}(t) = \underbrace{\mathcal{E}_\lambda}_{\text{Amplitude}}\; \underbrace{e^{\mp i\omega_\lambda t}}_{\text{Phase}}$$

ω_λ Lichtfrequenz der Mode im Resonator

Term A

$$\underline{E}\left(\underline{p}^{(-)} - \underline{p}^{(+)}\right)$$

$$= \sum_\lambda u_\lambda(x)\, \underline{e}_\lambda \left(E_\lambda^{(+)} + E_\lambda^{(-)}\right)\left(\underline{p}^{(-)} - \underline{p}^{(+)}\right)$$

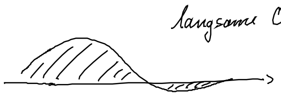
Resonatormoden

$\hbar\bar{\omega}$ Energieabstand

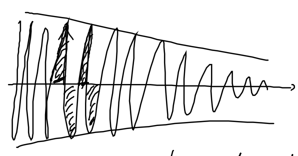
ω_λ Modenfrequenz

$$= \sum_\lambda u_\lambda(x)\, \underline{e}_\lambda \Big[\underbrace{E_\lambda^{+}\underline{p}^{-} - E_\lambda^{-}\underline{p}^{+}}_{\sim e^{\mp i(\omega_\lambda - \bar{\omega})t}} + \underbrace{E_\lambda^{-}\underline{p}^{-} - E_\lambda^{+}\underline{p}^{+}}_{\sim e^{\mp i(\omega_\lambda + \bar{\omega})t}} \Big]$$

langsame Osz.



schnelle Oszillation



positive und negative Beiträge kompensieren sich

-> kann vernachlässigt werden

RWA!

=>

$$\boxed{\dot{D} = \frac{D_0 - D}{T_1} - \frac{2}{i\hbar}\sum_\lambda \left(u_\lambda\, \underline{e}_\lambda\, E_\lambda^{+}\underline{p}^{-} - u_\lambda\, E_\lambda^{-}\underline{p}^{+}\right)}$$

analog auf ④ anwenden:

$$\underline{p}^{(-)}\dot{\underline{p}}^{(+)} = (-i\bar{\omega} - \gamma)\,\underline{p}^-\underline{p}^+ + \frac{\underline{p}^-}{i\hbar}\sum_\lambda \left(E_\lambda^+ + E_\lambda^-\right)\left(u_\lambda \underline{e}_\lambda \underline{\mu}_{21}\right)\underline{\mu}_{12}\cdot \underline{D}$$

vernachlässigbar

$\sim e^{i(\omega_\lambda + \bar{\omega})t}$

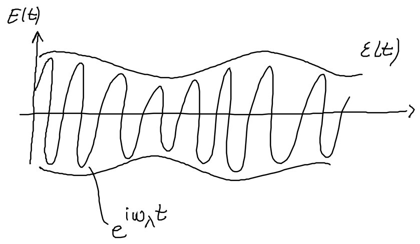
$$\Rightarrow \boxed{\dot{\underline{p}}^+ = (-i\bar{\omega} - \gamma)\underline{p}^+ + \frac{1}{i\hbar}\sum_\lambda E_\lambda^+\left(u_\lambda \underline{e}_\lambda \underline{\mu}_{21}\right)\underline{\mu}_{12}\,\underline{D}}$$

$E_\lambda = E^+ + E^-$

analog bei Wellengleichung ③

$$\boxed{\omega_\lambda^2 E_\lambda^\pm + \ddot{E}_\lambda^\pm + \sum_{\lambda'}\frac{\sigma_{\lambda\lambda'}}{\varepsilon_0}\dot{E}_\lambda^\pm = -\frac{1}{\varepsilon_0}\ddot{P}_\lambda^\pm}$$

2. Näherung: Slowly varying envelope approximation (SVEA) (SVA)



Überlegung zur Form der Lösung

$$E_\lambda^\pm(t) = \mathcal{E}_\lambda(t)\, e^{\mp i\omega_\lambda t}$$

falls: Dynamik mit ω_λ sehr viel schneller als Dynamik von $\mathcal{E}_\lambda(t)$

dann: $$\boxed{|\dot{\mathcal{E}}_\lambda| \ll |\omega_\lambda \mathcal{E}_\lambda|}$$

$$\dot{E}_\lambda^\pm(t) = \left(\dot{\mathcal{E}}_\lambda \mp i\omega_\lambda \mathcal{E}_\lambda\right) e^{\mp i\omega_\lambda t} \approx \mp i\omega_\lambda E_\lambda^\pm$$

$$\ddot{E}_\lambda^\pm(t) = \left(\ddot{\mathcal{E}}_\lambda \mp 2i\omega_\lambda \dot{\mathcal{E}}_\lambda - \underbrace{\omega_\lambda^2 \mathcal{E}_\lambda}\right) e^{\mp i\omega_\lambda t}$$

größte Term wird von $\omega_\lambda^2 E_\lambda^\pm$ in Wellengleichung kompensiert

→ Entwicklung weiter nötig

$$|\dot{\mathcal{E}}_\lambda| \ll |\omega_\lambda \mathcal{E}_\lambda|$$
$$|\ddot{\mathcal{E}}_\lambda| \ll |\omega_\lambda \dot{\mathcal{E}}_\lambda|$$

$$\ddot{E}_\lambda^\pm \approx \left(\mp 2i\omega_\lambda \dot{\mathcal{E}}_\lambda - \omega_\lambda^2 \mathcal{E}_\lambda\right) e^{\mp i\omega_\lambda t}$$

$$\downarrow$$

$$= \mp 2i\omega_\lambda \left(\dot{E}_\lambda^\pm \pm i\omega_\lambda E_\lambda^\pm\right) - \omega_\lambda^2 E_\lambda^\pm$$

Analog $\ddot{P}_\lambda^\pm \approx \bar{\omega}^2 P_\lambda^\pm$

- hier muss die Entwicklung nicht weiter getrieben werden da kein Term $\bar{\omega}^2 P_\lambda^\pm$ vorkommt

③

$$\Rightarrow \boxed{\dot{E}_\lambda^\pm = \left(\mp i\omega_\lambda - \kappa_\lambda\right) E_\lambda^\pm \pm i\frac{1}{2\varepsilon_0}\bar{\omega} P_\lambda^\pm}$$

keine zweifache Zeitableitung mehr!

Wellengleichung in erster Ordnung in der Zeit

- nur gültig wenn $|\dot{\mathcal{E}}_\lambda| \ll |\omega_\lambda \mathcal{E}_\lambda|$

reduzierte Wellengleichung

$\kappa_\lambda := \frac{\sigma_\lambda}{2\varepsilon_0}$ optische Verlustrate