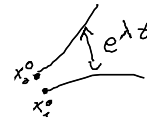


kurze Zusammenfassung von 1.4

- deterministisches Chaos \rightarrow empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen

- quantifizierbar über Lyapunov Exponenten



\downarrow
liefern auch Entropierate

Kolmogorow-Sinai Entropie (metrische Entropie) gegeben durch $\sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$

- Dimension definierbar über topologische Eigenschaften \rightarrow Hausdorff Dimension D_0 oder verallgemeinerte Dimension D_q ($D_0 > D_1 > D_2$)

$C(l)$: Korrelationssignal

$$C(l) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Theta(l - |x_i - x_j|)$$

Korrelationsdimension
 $\ln C(l) \sim D_2 \ln l$

l Zellgröße
 N Gesamtzahl der Punkte x_i

2. Dynamische Systeme mit Zeitverzögerung

- beschreibbar durch: Delay - Differentialgleichung (DDE)

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t-\tau))$$

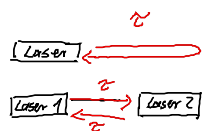
τ : Verzögerungszeit

- Anwendungen: • mechanische Systeme mit Balancierung, z.B. Segway



• elektronische Systeme \rightarrow Signallaufzeit liefert Delay

• optische Systeme



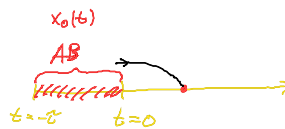
τ durch Lichtgeschw. gegeben

• biologische Systeme, z.B. Zell-Zyklus τ

Neuronennetzwerke mit Signallaufzeit τ

► Retardierung generiert reichhaltiges komplexes Verhalten

Grund: Phasenraumdimension n wird unendlich durch Delay
(Anfangsbedingung für ganzes Intervall in der Vergangenheit)



history function $x(t)$ auf $-\tau \leq t \leq 0$

Resultat: - einfache DDE kann z.B. chaotisches Verhalten liefern

- delay-induzierte Bifurkationen
- " " Multistabilitäten

- kann zur Kontrolle / Stabilisierung bereits instabiler Systeme benutzt werden
sowie zur Chaoskontrolle

2.1. Lineare Stabilitätsanalyse retardierter Differentialgl.

einfache lin. Delay-Dgl.: $\dot{x} = -a x(t) + b x(t-\tau)$ $x \in \mathbb{R}$
 $a, b \in \mathbb{R}$

mit AB $x_0(t)$ für $-\tau \leq t \leq 0$

Fixpunkte $\dot{x}^* = 0$

kleine Störungen um Fixpunkte $\delta x(t) \sim e^{\lambda t}$

in DDE eingesetzt

$$\lambda e^{\lambda \tau} = -a e^{\lambda \tau} + b e^{\lambda \tau} e^{-\lambda \tau}$$

$$\boxed{\lambda = -a + b e^{-\lambda \tau}}$$

transzendente charakteristische Gleichung für Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$

Lösung? : $e^{-a\tau} (\lambda + a) \tau = b \tau e^{-\lambda \tau} e^{-a\tau}$

$$e^{-a\tau} z = b \tau e^{-z}$$

mit $z = (\lambda + a) \tau$

$$z e^z = b \tau e^{a\tau}$$

inverse Fkt. von $z e^z = y$: $z = W_{\pm}(y)$ Lambert-Funktion

(vielblättrig, $\lambda \in \mathbb{C}$)

$$\left[\begin{array}{l} \text{vergleiche Logarithmus} \\ (e^z = y \leftrightarrow z = \ln y) \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \Lambda_\ell = -\alpha + \frac{1}{\tau} \omega_\ell \left(\underbrace{b\tau e^{a\tau}}_y \right)$$

b, a Parameter der linearen ODE

$$\left(\begin{array}{l} \alpha > 0 : \text{stabiler FP ohne Delay} \\ \alpha < 0 : \text{instabiler FP ohne Delay} \end{array} \right)$$

nach Konstruktion der ODE

allgemeine Lösung : $x(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell e^{\Lambda_\ell t}$
für $t > 0$

mit AB $x_0(\tau) = \sum_{\ell} c_\ell e^{\Lambda_\ell \tau}$

für $\tau \in [-\tau, 0]$
lineare c_ℓ

Hauptzweig : $\omega_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} y^n$

restliche Zweige können asymptotisch entwickelt werden für $\tau \rightarrow 0$ und $\tau \rightarrow \infty$:

$$\omega_\ell(y) \approx \ln y + 2\pi i \ell - \ln(\ln y + 2\pi i \ell)$$

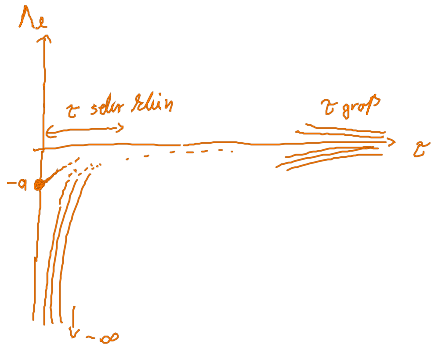
$\tau \rightarrow 0$ (mit $y = b\tau e^{a\tau}, y \rightarrow 0$)

$$\omega_\ell(y) \rightarrow -\infty$$

[siehe
A. Amano et al.
Physica A 373, 191 (2007)]

$$\Lambda_\ell = -\alpha + \frac{1}{\tau} \omega_\ell(y)$$

$$\Rightarrow \Lambda_\ell \rightarrow -\infty \quad \forall \ell \neq 0$$



Dynamik des Systems nur noch von Λ_0 bestimmt
(Eigenwert ohne Delay)

$\tau \rightarrow \infty$ (mit $y = b\tau e^{a\tau}$)

$$\Lambda_\ell \approx -\alpha + \frac{1}{\tau} \left(\ln(b\tau) + a\tau + 2\pi i \ell - \ln(\ln y + 2\pi i \ell) \right)$$

$\tau \rightarrow \infty$
gegen 0

$$\Lambda_\ell \rightarrow 0 \quad \forall \ell \neq 0$$

Bemerkung: transzendente Gleichung für Λ_ℓ kann ^{auch} numerisch gelöst werden.

2.2. Stabilisierung eines instabilen Fokus mit Delay

• Normalform eines instab. Fokus : $\Lambda = \lambda \pm i\omega$ ($\lambda > 0$)

$$\begin{cases} \text{tr} A^2 < 4 \det A \\ 4\lambda^2 < 4(\lambda^2 + \omega^2) \\ 0 < \omega^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

komplexe Schreibweise:

$$\dot{z} = (\lambda \pm i\omega) z, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

Erinnerung



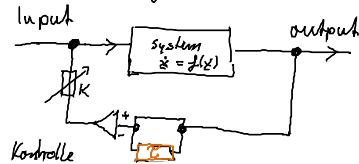
$$\begin{aligned} \text{tr} A &= 2\lambda \\ \det A &= \lambda^2 + \omega^2 \end{aligned}$$

• mit zeitverzögerter Rückkopplung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} x(t) - x(t-\tau) \\ y(t) - y(t-\tau) \end{pmatrix}$$

↳ Vorteil: Kontrollsignal verschwindet wenn Kontrolle erfolgreich

- Pyragas Kontrolle
- diagonale Kontrolle



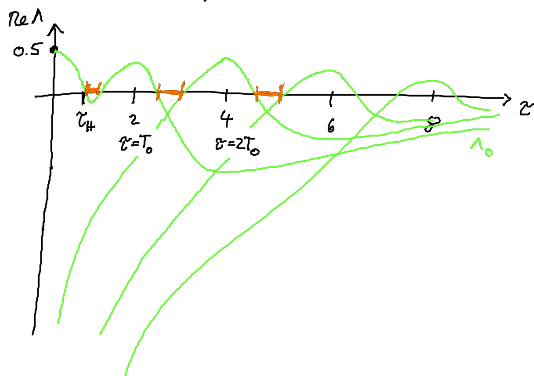
Umformen auf einfache DDE:

$$\dot{z} = \underbrace{(\lambda - K \pm i\omega)}_a z + \underbrace{K}_b z(t-\tau)$$

→ gelöste charakteristische Gleichung

$$\Lambda_e z = W_e (K e^{-\lambda \tau} e^{-(\lambda \pm i\omega)\tau + K\tau}) + (\lambda + i\omega)z - Kz$$

numerische Lösung



natürliche Zeitskala

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\begin{aligned} \lambda = 0.5, \quad \omega = \pi, \quad K = 0.3 \\ \downarrow \\ T_0 = 2 \end{aligned}$$

num. Beobachtung

Stabilisierung des instabilen Fokus durch Delay.

Vermutung: Delay induziert eine Hopf-Bifurkation bei $\tau = \tau_H$ da sich

ReA durch Null gelöst.

Frage: Analytische Bestimmung von $\bar{\tau}_H$?



Vermutung : $\bar{\tau} \approx \frac{T_0}{2}$