

5.5. Vielmodenbetrieb der Lasergrundgleichungen

(I) $\dot{a}_\lambda = (-i\omega_\lambda - \kappa_\lambda) a_\lambda - i \sum_n g_{\lambda n} p_n$ Feld a_λ einer Mode mit Frequenz ω_λ

(II) $\dot{p}_n = (-i\bar{\omega}_n - \gamma) p_n + i \sum_\lambda g_{\lambda n} a_\lambda d_n$ miker. Polarisation

(III) $\dot{d}_n = \frac{d_0 - d_n}{T_1} + 2i \sum_\lambda (g_{\lambda n}^* p_n a_\lambda^* - c.c.)$ Inversion

5.5.1. Bilanzgleichungen im Vielmodenfall (Class B Multimodulaser)

- wir betrachten m Resonatormoden $\lambda = 1, \dots, m$

- Ansatz $a_\lambda(t) = \mathcal{E}_\lambda(t) e^{-i(\Omega_\lambda t + i\varphi)}$ zeitlich langsam veränderliche Amplitude $\mathcal{E}_\lambda(t)$
 $p_n(t) = \sum_\lambda p_A^\lambda(t) e^{-i(\Omega_\lambda t + i\varphi)}$ d.h. Polarisation schwingt im Takt mit Feldmoden

→ einsetzen in (II):

$$\sum_\lambda (\dot{p}_A^\lambda - i\Omega_\lambda p_A^\lambda) e^{-i\Omega_\lambda t} = (-i\bar{\omega}_n - \gamma) \sum_\lambda p_A^\lambda e^{-i\Omega_\lambda t} + i \sum_\lambda g_{\lambda n} d_n \mathcal{E}_\lambda(t) e^{-i\Omega_\lambda t}$$

Koeffizientenvergleich für einzelne Moden (gilt näherungsweise für $p_A(t)$ und $\mathcal{E}_\lambda(t)$ langsam gegenüber $e^{-i\Omega_\lambda t}$)

$$\dot{p}_A^\lambda = [-i(\bar{\omega}_n - \Omega_\lambda) - \gamma] p_A^\lambda + i g_{\lambda n} d_n \mathcal{E}_\lambda \quad \gamma = \frac{1}{T_2}$$

Annahme: Polarisation relaxiert schneller als Inversion und Feldmode $[\gamma \gg \frac{1}{T_1}, \gamma \gg \kappa]$

$p_A^\lambda \approx 0$ auf Zeitskalen größer als T_2 Class B

$$\textcircled{*} \quad \rightarrow \underline{\underline{p_A^\lambda(t) = \frac{i g_{\lambda n} d_n(t) \mathcal{E}_\lambda(t)}{i(\bar{\omega}_n - \Omega_\lambda) + \gamma}}}} \quad \Rightarrow \quad p_n = \sum_\lambda \frac{1}{\bar{\omega}_n - \Omega_\lambda - \gamma} g_{\lambda n} d_n a_\lambda$$

Einsetzen von $\textcircled{*}$ in (I) und (III) ergibt:

$$\dot{a}_\lambda = (-i\omega_\lambda - \kappa_\lambda) a_\lambda - i \sum_{n \neq \lambda} \frac{g_{\lambda n}^* g_{\lambda' n}}{\bar{\omega}_n - \Omega_{\lambda'} - i\gamma} a_{\lambda'} d_n$$

$$\dot{d}_n = \frac{d_0 - d_n}{T_1} - 2i \sum_{\lambda \lambda'} \left[\frac{g_{\lambda n} g_{\lambda' n}^*}{\bar{\omega}_n - \Omega_{\lambda'} + i\gamma} a_{\lambda'}^* a_\lambda - c.c. \right] d_n$$

Frage: welchen Beitrag machen Terme der Form $a_{\lambda'}^* a_{\lambda}$

Photonenzahl: $N_{ph}^{\lambda} = S_{\lambda} = a_{\lambda}^* a_{\lambda}$

$$\Rightarrow \dot{S}_{\lambda} = \dot{a}_{\lambda}^* a_{\lambda} + a_{\lambda}^* \dot{a}_{\lambda} = -2\kappa_{\lambda} S_{\lambda} + \sum_{n \neq \lambda'} \left[i \frac{g_{\lambda n} g_{\lambda' n}^* a_{\lambda} a_{\lambda'}^*}{\bar{\omega}_n - \Omega_{\lambda'} + i\gamma} - i \frac{g_{\lambda n} g_{\lambda' n} a_{\lambda}^* a_{\lambda'}}{\bar{\omega}_n - \Omega_{\lambda} - i\gamma} \right] d_n$$

Fall voneinander unabhängiger Phasenkorrelationen (Gegenteil von Modulkopplung)

Annahme: Phasen versch. Moden sind unkorreliert: Phasemittel mit $\lambda \neq \lambda'$ voneinander

$$\overline{a_{\lambda}^* a_{\lambda'}} = \left(\overline{\epsilon_{\lambda}^*(t) \epsilon_{\lambda'}(t)} \right) e^{i(\Omega_{\lambda} - \Omega_{\lambda'})t}$$

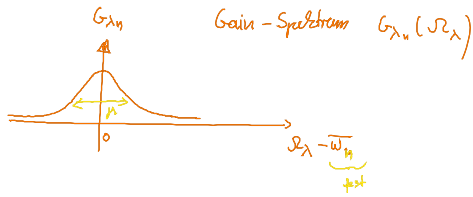
$$\left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\phi_{\lambda} \int_0^{2\pi} d\phi_{\lambda'} e^{i(\phi_{\lambda} - \phi_{\lambda'})}$$

$$= S_{\lambda} \delta_{\lambda\lambda'}$$

Phasemittel auf beiden Seiten der Photonenzahl DGL, und d_n DGL:

$$\begin{aligned} \text{I}^* \quad & \dot{S}_{\lambda} = -2\kappa_{\lambda} S_{\lambda} + S_{\lambda} \sum_n G_{\lambda n} d_n \\ \text{III}^* \quad & \dot{d}_n = \frac{d_0 - d_n}{\tau_n} - 2d_n \sum_{\lambda} S_{\lambda} G_{\lambda n} \end{aligned}$$

mit $G_{\lambda n} = \frac{2\gamma |g_{\lambda n}|^2}{\gamma^2 + (\bar{\omega}_n - \Omega_{\lambda})^2}$
 ↑
 Einsteinkoeffizient



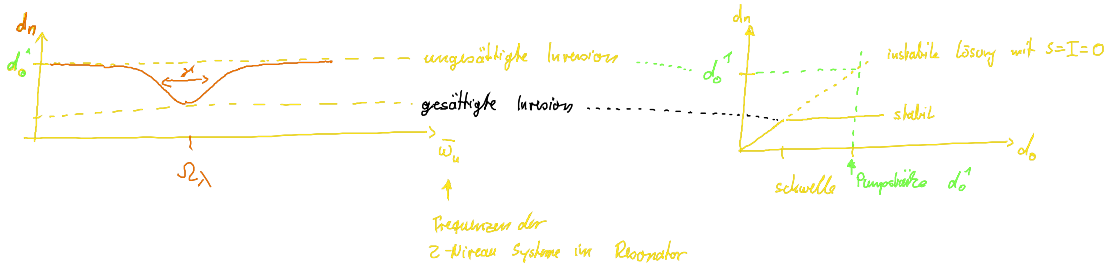
Dynamische Effekte der Gleichungen I* und III* ?

Lichtbrennen

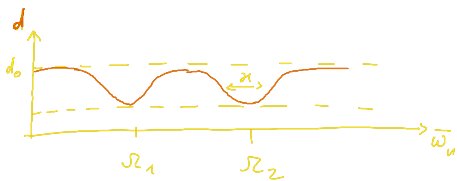
stationäre Zustände von d_n : $d_n = \frac{d_0}{1 + 2\tau_n \sum_{\lambda} S_{\lambda} G_{\lambda n}}$

Entwicklung für kleine S_{λ} : $d_n \approx d_0 \left(1 - 2\tau_n \sum_{\lambda} S_{\lambda} G_{\lambda n} \right)$
 (Licht oberhalb der Schwelle)

a) Spektrales Lochbrennen (durch eine Mode S_{λ})
 sei $|g_{\lambda u}|^2$ ortsunabhängig



2 Moden im Resonator mit $|\Omega_1 - \Omega_2| \gg \frac{1}{T_2} = \gamma$



keine WW der Moden untereinander
 -> jede Mode hat ihr eigenes Gain Medium

falls $|\Omega_1 - \Omega_2| < \frac{1}{T_2} \Rightarrow$ Modenwettbewerb

Fall Modenwettbewerb, homogenes Medium:

$$\dot{S}_{\lambda} = (G_{\lambda} D - \gamma_{\lambda}) S_{\lambda} \quad D = \sum_n d_n$$

$$\dot{D} = \frac{D_0 - D}{T} - \gamma D \sum_{\lambda} S_{\lambda} G_{\lambda} \quad G_{\lambda u} = G_{\lambda}$$

stationäre Lösungen: $S_{\lambda} = 0$ oder $D = \frac{\gamma_{\lambda 1}}{G_{\lambda 1}} = \frac{\gamma_{\lambda 2}}{G_{\lambda 2}}$ und $S_{\lambda 1} \neq 0$
 $S_{\lambda 2} \neq 0$

↑
 nicht gleichzeitig für mehrere Moden zu erfüllen!
 ↓

Modenselektion durch den Laserprozess!

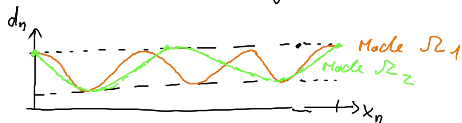
d.h. Laser zueinst (unter der Schwelle) Breitbandverstärker, am Ende gewinnt nur eine Mode (die mit maximalem Gain)

"the winner takes it all"

(falls nur ein homogenes Gain Medium vorhanden ist)

b) räumliches Lochbrennen

inhomogene Lichtverteilung (stehende Welle) führt zu örtlichen Variationen von d_n



$G_{\lambda u}$ räumlich moduliert

-> koexistierende Moden sind möglich

5.5.2 Modulkopplung im Vielmodenfall

• numerisch können Gleichungen (I)-(III) gelöst werden (mit zusätzlicher Effort, der Phasen synchronisiert)

• Analytische Methode für kleine S_λ knapp über der Schwelle, homogenes Medium

$$0 = \sum d_n$$

Iterative Lösung Schema:

Start: $d_n^{(0)} \Rightarrow \dot{p}_n = (-i\bar{\omega}_n - \mu) p_n + i \sum_\lambda g_{\lambda n} a_\lambda d_n^{(0)}$

$\xrightarrow{\text{mit } d_n^{(1)}} \dot{d}_u = \frac{d_0 - d_u}{T_1} + 2 \sum_\lambda (i g_{\lambda u}^* p_w a_\lambda^* + c.c.)$

$d_n^{(1)}$ aus $\dot{d}_n = 0$
 $d_u^{(2)}$ aus $\dot{d}_u = 0$

$p_n^{(1)}$ aus $\dot{p}_n = 0$
 $p_n^{(2)}$ aus $\dot{p}_n = 0$

Ausgeführt bis zur 2. Iteration

$$p_n = \sum_\lambda p_n^\lambda e^{-iJ_2 \lambda t + i\mu t}$$

0. Näherung $d_n^{(0)} = d_0$ ungesättigte Inversion

1. Iteration $p_n^{(1)} = d_0 \sum_\lambda \frac{g_{\lambda n}}{\bar{\omega}_n - J_2 \lambda - i\mu} a_\lambda(t)$

$$\Rightarrow d_n^{(1)} = d_0 \left(1 - 2 \sum_{\lambda \lambda'} (g_{\lambda n}^* g_{\lambda' n} a_{\lambda'}^* a_\lambda^* M_{\lambda \lambda'}^n + c.c.) \right)$$

$$M_{\lambda \lambda'}^n = - \frac{i}{\bar{\omega}_n - J_2 \lambda - i\mu} \cdot \frac{1}{T_1 + i(J_2 \lambda - J_2 \lambda')}$$

2. Iteration $p_n^{(2)} = d_0 \sum_\lambda \frac{g_{\lambda n}}{\bar{\omega}_n - J_2 \lambda - i\mu} a_\lambda - 2d_0 \sum_{\lambda \lambda'} i g_{\lambda n} g_{\lambda' n} g_{\lambda'' n} a_\lambda a_{\lambda'} a_{\lambda''} \cdot \bar{M}_{\lambda \lambda' \lambda''}^n$

\uparrow lineare Suszeptibilität ($P = \chi^{(1)} E$)
 \uparrow nichtlineare Suszeptibilität ($P = \chi^{(3)} E^3$)

\uparrow folgt durch Einsetzen

Einsetzen in Feldgleichung für a_λ ergibt Dynamik

(i) Fall 1 Mode

$$d_n^{(1)} = d_0 \left(1 - 2 |a|^2 |g_{\lambda n}|^2 \frac{2\mu T_1}{(\bar{\omega}_n - J_2 \lambda)^2 + \mu^2} \right) = d_0 \left(1 - 2 T_1 G_{\lambda n} |a_\lambda|^2 \right)$$

\uparrow Lochbrennen (bekannt aus 5.5.1.)

(ii) 2 Moden

$$d_n^{(1)} = d_0 \left(1 - \left[2 T_1 G_{\lambda_1 n} |a_{\lambda_1}|^2 - 2 T_1 G_{\lambda_2 n} |a_{\lambda_2}|^2 \right] \right)$$

$\dots \rightarrow$ Lochbrennen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx \mathcal{R}_1 \\ \lambda_2 &\approx \mathcal{R}_2 \end{aligned}$$

$$\left. -z g_1^* g_2 M_{12}^u \underline{a_1^* a_2} + c.c. - z g_2^* g_1 M_{21}^u \underline{a_2^* a_1} + c.c. \right]) \rightarrow \text{Perturbation der Inversion}$$

$$\sim e^{i(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)t} \quad e^{i(\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1)t}$$

→ Durch Phasenkopplung beider Moden entstehen Inversionsperturbationen mit der Differenzfrequenz

(iii) bei vielen Moden entstehen kurze Pulse im E-Feld
(kohärente Überlagerung)