1.2.3 Dissipative Systeme

Für dissipative Systeme gilt für kleine Volumina, die einen asymptotisch stabilen Fixpunkt $\underline{x}^*$ umschließen

$$\frac{dV_t}{dt} \approx \int_{U_t} d^{2f}x \,(\mathrm{div}\,\underline{F})_{\underline{x}^*} = \Lambda \cdot V_t \quad \Rightarrow \quad V(t) = e^{\Lambda t} V_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

mit Phasenraumkontraktionsrate Λ:

$$\mathrm{div}\,\underline{F} = \mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} = \sum_i \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$$

Erinnerung: Dissipative Systeme sind solche, die Phasenraumvolumina kontrahieren, d.h. wenn $\mathrm{div}\,\underline{F} < 0$

Asymptotisch stabile Fixpunkte (Knoten, Fokus) heißen Senken oder Attraktoren (mit Dimension 0).

Bsp.: $n = 1$

Lasergleichung (Class A)

$$\dot{E} = \frac{1}{2} E\,(P - 1 - E^2) = f(E)$$

$$DF = \frac{\partial}{\partial E}(f(E)) = \frac{1}{2}(P-1) - \frac{3}{2}E^2$$

E: elektrisches Feld
P: Pumpstrom

Fixpunkte: $E = 0$ ①
$E^2 = P - 1$ ②

$$\underline{\underline{A}} = DF|_{①} = \frac{1}{2}(P-1) \qquad DF|_{②} = -(P-1)$$

Attraktor für $P < 1$

Attraktor für $P > 1$ $\hat{=}$ stabiler FP

$n = 3$

Lorenzmodell (abgeleitet aus der Temperatur [y, z] und Strömungsverteilung [x] einer inkompressiblen Flüssigkeit: Rayleigh-Bénard-System)

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$$
$$\dot{y} = -x \cdot z + \rho z - y$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

$\sigma, \rho, b > 0$

Linearisierung

$$D\underline{F} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z & -1 & \rho - x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{F}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

$$\longrightarrow \Lambda = \mathrm{tr}\, D\underline{F} = -(\sigma + 1 + b)$$

$$\Rightarrow V(t) = e^{-(\sigma+1+b)t} \, V_0 \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

Phasenraumvolumina schrumpfen monoton!

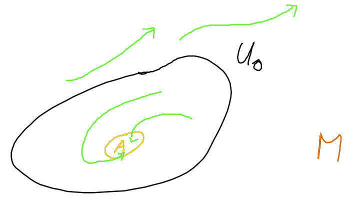
Bem: semiklass. Lasergleichungen (Maxwell-Bloch-Gl.) sind äquivalent zu den Lorenzgleichungen. (siehe Hermann Haken) (Class C Laser)

Das Langzeitverhalten dissipativer Systeme wird durch Attraktoren bestimmt.

Def.: Sei $\underline{F}$ ein Vektorfeld auf $M = \mathbb{R}^n$. Eine abgeschlossene, unter dem Fluss ϕ_t invariante ($\phi_t(A) \subseteq A$), unzerlegbare Teilmenge $A \subset M$ heißt $\boxed{\text{Attraktor}}$, falls gilt:

(i) $A \in U_0$ (offene Umgebung von A) mit $\phi_t(U_0) \subseteq U_0$ $(t > 0)$

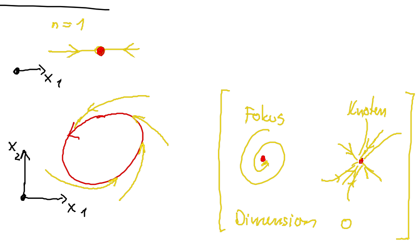
(ii) $\forall V$ mit $A \subset V \subset U_0$ $\exists T > 0$, so dass $\phi_t(U_0) \subset V$ $(t > T)$

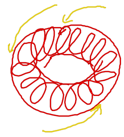
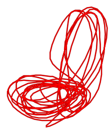


d.h. es gibt ein Attraktorbecken U_0, aus dem der Fluss asymptotisch in den Attraktor läuft.

NB: Es kann mehrere koexistierende Attraktoren auf M geben.

Mindestdimension n des Phasenraumes	Attraktor	Attraktordimension
1	stabile Fixpunkte	0
2	stabiler Grenzzyklus (limit cycle)	1



3	stabiler Torus T^2	2	 2 Frequenzen ω_1, ω_2 Oberfläche wird dicht „umwickelt" $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$ quasiperiodisch falls $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$ → Trajektorien schließt → Attraktor hat eine Dimension
	seltsame (strange) Attraktor	$2 < d < 3$ fraktal	chaotischer Attraktor 

1.3. Bifurkationen

- Abhängigkeit des Flusses von einem Kontrollparameter μ ?
- Zahl und Art der Attraktoren kann sich schlagartig bei einem krit. Wert μ_c ändern
  → Bifurkation („Verzweigung der Lösungsmannigfaltigkeit)

  Notwendige Voraussetzung: Nichtlinearität

- Verknüpft mit Stabilitätswechsel → untersuche lineare Stabilität der Fixpunkte (für lokale Stabilität)

Klassifizierung:

(A) Eigenwert-Null-Bifurkation

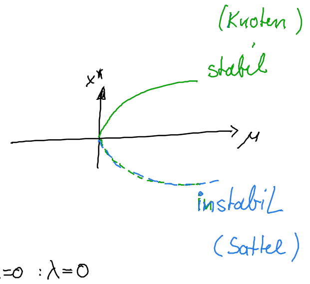
$\lambda < 0 \longrightarrow \lambda > 0$

$\det A > 0 \quad \longrightarrow \quad \det A < 0$

(A1) Sattel – Knoten – Bifurkation

$n=1 \qquad \boxed{\dot{x} = \mu - x^2}$

Zahl der Fixpunkte ändert sich bei $\mu_c = 0$



Fixpunkte $x^* = \pm\sqrt{\mu}$

$DF = -2x \nearrow \underline{\underline{A}}^{\oplus} = -2\sqrt{\mu}$

$\underline{\underline{A}}^{\ominus} = 2\sqrt{\mu}$

bei $\mu = 0 : \lambda = 0$

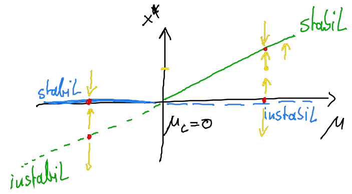
$\mu > 0 : \lambda \lessgtr 0$

(A2) Transkritische Bifurkation

Normalform $\nearrow \boxed{\dot{x} = \mu x - x^2}$

Eigenwert $\lambda \to e^{\lambda t} \sim \delta x(t)$

$x^* = \begin{cases} 0 \\ \mu \end{cases} \qquad DF = \mu - 2x = \begin{cases} \mu \\ -\mu \end{cases}$



Stabilitätswechsel bei $\mu_c = 0$

(A3) Stimmgabel – Bifurkation (pitch fork bifurcation)

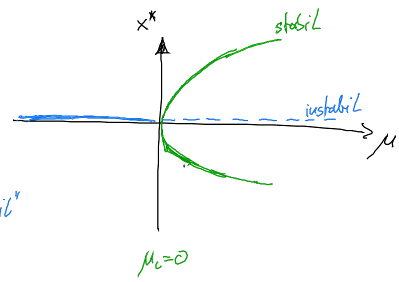
$\boxed{\dot{x} = \mu x - x^3}$

$x^* = \begin{cases} \pm\sqrt{\mu} \\ 0 \end{cases} \qquad DF = \mu - 3x^2 = \begin{cases} -2\mu & \text{stabil für } \mu > 0 \\ \mu & \text{stabil für } \mu < 0 \end{cases}$

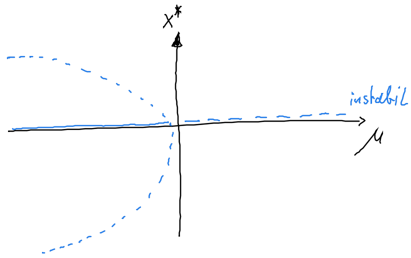
Zahl & Stabilitätswechsel

superkritisch

„neue Lösungen sind stabil"



$\boxed{\dot{x} = \mu x + x^3}$



subkritisch

"neue Lösungen sind instabil"