

# 1.3. Bifurkationen (Fortsetzung)

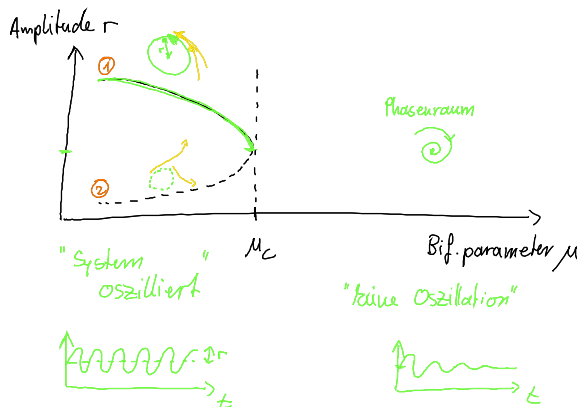
## (c) Lokale Bifurkationen von Grenzyklen (LC)

Startpunkt jetzt: Grenzyklus (kein Fixpunkt sondern 1D Attraktor)

→ keine einfache Stabilitätsanalyse sondern Floquet-Theorie

### (C1) Sattel-Knoten Bifurkation eines Grenzyklus

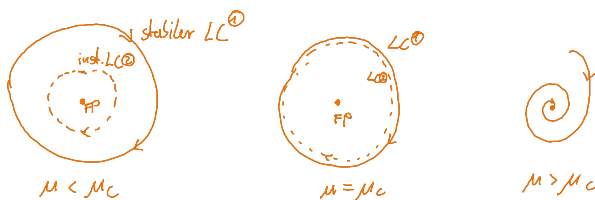
$$\left[ \begin{array}{l} \text{Floquet Multiplikator} \\ \mu = e^{\lambda T} \\ \text{LC stabil } |\mu| < 1 \end{array} \right]$$



#### Skalierungsverhalten

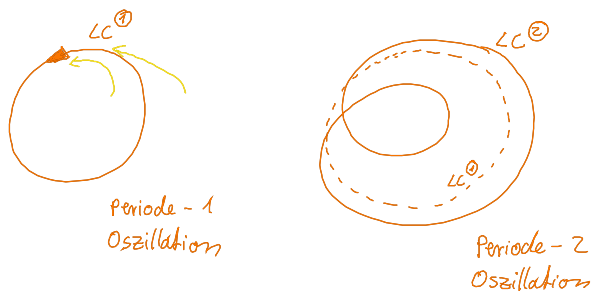
$$\begin{array}{ll} \text{Amplitude} \neq 0 & \mathcal{O}(1) \\ \text{Frequenz} \neq 0 & \mathcal{O}(1) \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Erinnerung} \\ \text{Hopf-Bifurkation} \\ \text{Amplitude } \mathcal{O}(\sqrt{\mu}) \\ \text{Frequenz } \mathcal{O}(1) \end{array} \right]$$

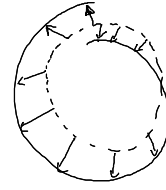
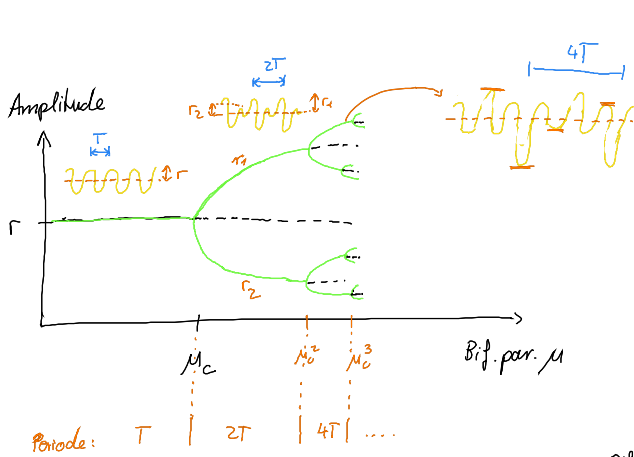


Englischer Name: condensation of paths  
fold bifurcation of LC

### (C2) Perioden - Verdopplungs Bifurkation (flip bifurkation)



mind. 3 Phasenraumdim. nötig



phase flip  $\pi$   
nach einem Umlauf  
der Periode - 1

Torus unadäquaten  
Trajektorien

Floquet Exponenten  $\Lambda = \lambda + i\omega$

am Bifurkations-  
punkt  $\mu = \mu_c$  }  $\lambda = 0$   
 $\omega T = \pi$

→ Floquet Multiplikator

$$\mu = e^{\Lambda T} = e^{i\pi} = -1$$

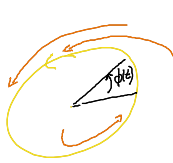
häufig Periodenverdopplungs-Kaskade ins Chaos  
(Feigenbaum - Szenario)

→ unendlich viele instabile periodische Orbits der Periode  
 $2^n T$  ( $n=0,1,2,\dots$ )



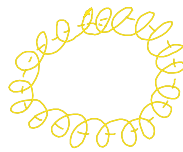
chaotische Trajektorie

(C3) Weinmark - Sacher Bifurkationen  
(= Sekundäre Hopf - Bifurkationen)  
(= Torus Bifurkationen)



1. Hopf - Bifurkation des FP  
 $\phi_1 = \omega_1 t$

2. Hopf - Bifurkation des LC ( $\mu = \mu_c$ )  
 $\phi_2 = \omega_2 t$



Trajektorie schließt  
sich  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$

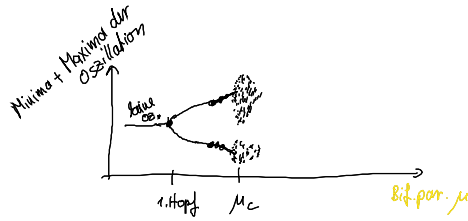
► 1D Attraktor, LC



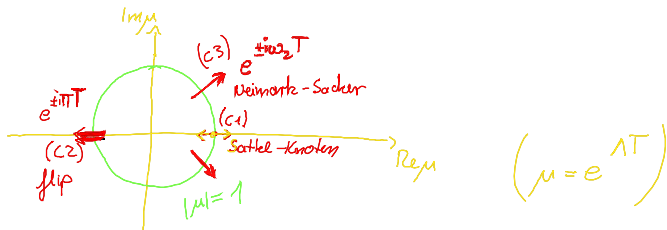
Trajektorie schließt  
nicht, d.h. füllt Torus-Oberfläche  
dicht aus  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$

► 2D Attraktor, Torus

mind 3 Phasenraumdim.



im Raum der Floquet-Multiplikatoren

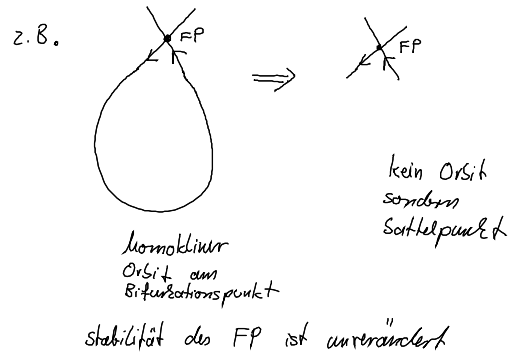


(Fall  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$  : Frequency locking)

Bemerkung: Periodenverdopplung ist ein Neimark-Sattel für  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 2$ .

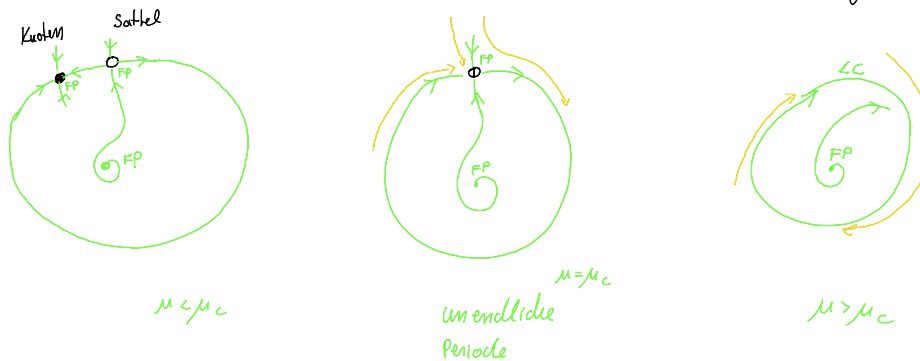
(D) Globale Bifurkationen von Grenzzyklen

globale qualitative Änderungen im Phasenportrait



(D1) Sattel-Knoten-Bifurkation eines Grenzzyklus

(Omega explosion)



• Einfaches gemischtes Modell für SNIPER

Skalierungsverhalten

Amplitude  $\neq 0$   $O(1)$

Frequenz  $\rightarrow 0$

↳ Saddle-node infinite period (SNIPER)

Saddle-node on invariant cycle (SNIC)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x^2-y^2) + y(x-b) \\ \dot{y} &= y(1-x^2-y^2) - x(x-b) \end{aligned}$$

in Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$   
 $y = r \sin \varphi$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1-r^2) \\ \dot{\varphi} &= b - r \cos \varphi \end{aligned}$$

Fixpunkte:  $r=0$

$r=1$ ,  $b = \cos \varphi$

↓  
 $\varphi = \arccos b$   
( $b < 1$ )

SNIPER bei  $b=1$

$b > 1$ : LC mit  $r=1$   $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = b - \cos \varphi > 0$

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{b - \cos \varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{b^2 - 1}}$$

→  $T \rightarrow \infty$  für  $b \rightarrow 1$

skaliert mit  $\frac{1}{\sqrt{b^2 - 1}}$

$b_c = 1$

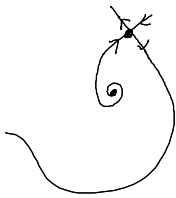
$b - b_c$

Skalierungsverhalten  
SNIPER

$T: O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)$

Amplitude:  $O(1)$

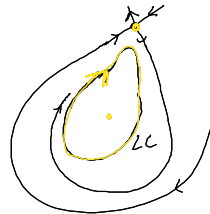
(D2) Homokline Bifurkation (blue sky catastrophe)



$\mu > \mu_c$



$\mu = \mu_c$



$\mu < \mu_c$

unendliche  
Periode

Skalierungsverhalten

$$T: \sigma(\ln \mu)$$
$$\text{Amplitude: } \sigma(1)$$

Abstand zum  
Bifurkationspunkt

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Normalform:} \\ \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu y + x - x^2 + xy \end{array} \quad \text{bei } \mu_c = -0.8645 \right]$$