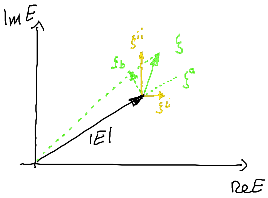
6.4.1. Linienbreite eines Class A Lasers mit Amplituden-Phasen Kopplung

$$\dot{E} = (1+i\alpha)(g - |E|^2)E + i\omega_0 E + D\xi$$

Gauß'sches weißes Rauschen

$$\xi = \xi^{i} + i\xi^{ii}$$



Phasenänderung + Amplitudenänderung durch spontane Emission

α : Amplituden Phasen Kopplung

"Linewidth enhancement factor"

Umschreiben in Amplitude und Phase

$$E = A e^{i\phi}$$

$$\dot{E} = A i \dot{\phi} e^{i\phi} + \dot{A} e^{i\phi}$$

$$(\Delta\phi = \phi - \omega_0 t)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{A} &= (g - A^2)A + D\xi^a \\ \Delta\dot{\phi} &= \alpha(g - A^2) + \frac{D}{A}\xi^b \end{aligned}} \quad (*)$$

stochastische DGL

Bemerkung:

D ist bekannt beim Laser (hängt von der Geometrie des Resonators ab)

$$D = \sqrt{\beta \frac{\hbar\omega_0}{\epsilon_0\epsilon_r} \, n \, \frac{1}{\tau_{sp}}}$$

Lebensdauer des Niveaus

Teil der spont. Emission, der in der Lasermode landet

Ladungsträgerdichte $n = N - N_{th}$

- Varianzmatrix von linearen DGL's liefert die Linienbreite $\longrightarrow$ d.h. Linearisieren von (*)

$$\underline{\underline{A}} = DF\big|_{FP} = \left.\begin{pmatrix} g - 3A^2 & 0 \\ -2\alpha A & 0 \end{pmatrix}\right|_{A=\sqrt{g}} = \begin{pmatrix} -2g & 0 \\ -2\alpha\sqrt{g} & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$:

$\Delta\phi$ führt mit Rauschen einen Random Walk durch → unbegrenzte Varianz

$$\lambda_1 = 0 \qquad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2\gamma \qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\gamma}/\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

Amplitude hat begrenzte Varianz

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \delta A \\ \delta\Delta\phi \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} \delta A \\ \delta\Delta\phi \end{pmatrix} + \underline{\underline{B}} \begin{pmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & \frac{D}{\sqrt{\gamma}} \end{pmatrix}$$

Varianzmatrix :

$$\underline{\underline{\sigma}}^2(t) = \int_0^t e^{\underline{\underline{A}}(t-t')} \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}}^T e^{\underline{\underline{A}}^T(t-t')} dt'$$

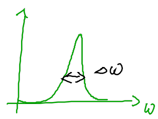
$$= \int_0^t dt' \begin{pmatrix} \underbrace{\boxed{D^2 e^{4\gamma(t'-t)}}}_{M_{11}} & \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} D^2 e^{2\gamma(t'-t)}\left(e^{2\gamma(t'-t)} - 1\right) \\ -D^2 e^{2\gamma(t-t')}\left(e^{2\gamma(t'-t)} - 1\right)\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} & \underbrace{\boxed{\frac{D^2}{\gamma} + D^2\left(e^{2\gamma(t'-t)} - 1\right)^2 \frac{\alpha^2}{\gamma}}}_{M_{22}} \end{pmatrix}$$

$$\sigma^2_{\Delta\phi\Delta\phi} = \int_0^t M_{22}\, dt' \qquad \sigma^2_{AA} = \int_0^t M_{11}\, dt'$$

$$\sigma^2_{\Delta\phi\Delta\phi}(t) = \frac{D^2}{\gamma}\left[t - \frac{\alpha^2}{4\gamma}\left(3 + \underbrace{e^{-4\gamma t} - 4e^{-2\gamma t}}_{\to 0 \text{ für } t\to\infty} - 4\gamma t\right)\right] \qquad \sigma^2_{AA} = \frac{D^2}{4\gamma}$$

$$\overset{t\to\infty}{=} \frac{D^2}{\gamma}(1+\alpha^2)\cdot t - \frac{3D^2\alpha^2}{4\gamma^2} \qquad (*_2)$$

Spektrum von $E(t)$?



▶ **Def. 1:** Gauß'sche Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable x heißt Gauß'sch falls es ein σ gibt, so dass

$$\varphi_x(s) = \langle e^{isx} \rangle = e^{-\frac{s^2\sigma}{2}}$$

charakteristische Funktion

- Angewendet auf Laser: $\Delta\phi$ ist eine Gauß'sche Zufallsvariable, da $\sigma^2_{\Delta\phi\Delta\phi} \sim t$

  → (s = 1) und Def. 1: $\langle e^{i\phi}\rangle = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2_{\Delta\phi\Delta\phi}}$, $\sigma^2_{\Delta\phi\Delta\phi} = \langle [\Delta\phi - \langle\Delta\phi\rangle]^2\rangle$

- Spektrum von E kann über Autokorrelationsfunktion $\Psi_E(t_s)$

$$\Psi_E(t_s) = \langle E^*(t)\,E(t+t_s)\rangle = \langle A(t)\,A(t+t_s)\, e^{-i\Delta\phi(t)}\, e^{i\Delta\phi(t+t_s)}\rangle$$

$$\approx \underbrace{\langle A(0)^2\rangle}_{A^2} \langle e^{i\Delta\phi(t_s)}\rangle$$

Im Fixpunkt $A(t)=A(t+t_s)=A(0)$

Annahme: keine Korrelation von Amplituden und Phasenrauschen

$$= A^2 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2_{\Delta\phi\Delta\phi}}$$

(*2)

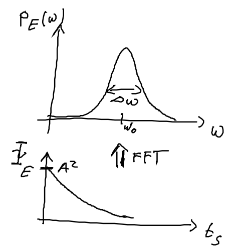
$$\Psi_E(t_s) = A^2 e^{\underbrace{-\frac{1}{2}\frac{D^2}{\gamma}(1+\alpha^2)\,t_s}_{\lambda_s}} = A^2 e^{-\lambda_s t_s}$$

[$e^{\frac{1}{2}\frac{3D^2\alpha^2}{4\gamma^2}}$ wurde vernachlässigt]

Wiener Khinchin Theorem ergibt Fourier Spektrum von E

→ Lorentz-Kurve mit Breite $\Delta\omega = 2\lambda_s$.

$$\Delta\omega = \frac{\sigma^2_{\Delta\phi\Delta\phi}}{t}$$



→ Linienbreite $\Delta\omega$ ergibt sich aus der Varianz der Phase!

$$\Delta\omega = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\,\sigma^2_{\Delta\phi\Delta\phi}(t)$$

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{D^2}{A^2}(1+\alpha^2)}$$

Linienbreite des Lasers

- α-Faktor bestimmt, d.h. vergrößert, die Linienbreite des Lasers

  (Historisch wurde so α aufgrund von Experimenten eingeführt)

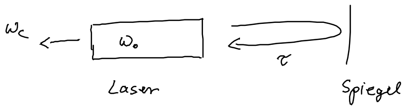
- Äquivalente Phasengleichung $\Delta\dot{\phi} = \frac{D}{A}\sqrt{1+\alpha^2}\,\xi^b$ liefert gleiche Linienbreite wie volle DGL des Class A Lasers.

  α ändert Rauschstärke der Phasengleichung $D^{eff} = D\sqrt{1+\alpha^2}$

  [$\dot{E} = (\gamma - A^2)A + D\xi^a$
  $\Delta\dot{\phi} = \alpha(\gamma - A^2) + \frac{D}{A}\xi^b$]

Frage: Wie verändert Feedback die Linienbreite?

6.4.2. Linienbreite mit optischem Feedback



$\omega_0 = \omega_{th}\,\tau_{ph}$ (Frequenz an der Schwelle ohne Feedback)

$\omega_c - \omega_0 = \Delta\omega$ Frequenzshift durch Feedback

$$\dot{E} = (1+i\alpha)\left(J - |E|^2\right)E + D\xi + i\omega_0 E + k\,E(t-\tau)$$

(zunächst $\alpha = 0$)

Amplituden + Phasen Darstellung

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{A} &= (J - A^2)A + D\xi^a + k\,A(t-\tau)\cos\left(\phi(t-\tau) - \phi(t)\right) \\ \dot{\phi} &= \omega_0 + \frac{D}{A(t)}\xi^b + k\,\frac{A(t-\tau)}{A(t)}\sin\left(\phi(t-\tau) - \phi(t)\right) \end{aligned}}$$

Erinnerung: • Feedback ändert Frequenz der Fixpunkt-Lösungen (ECM)

$$\omega_c - \omega_0 = -k\alpha\cos\omega_c\tau - k\sin\omega_c\tau$$

$\alpha = 0$ $\qquad \omega_c = \omega_0 - k\sin\omega_c\tau$

• Rotation der Phase ins mitbewegte Koordinatensystem ω_c

$$\Delta\phi = \phi - \omega_c t$$

$$\Delta\dot{\phi} = \dot{\phi} - \omega_c \qquad \Longrightarrow \text{ dann ist } \Delta\dot{\phi} = 0 \text{ auf ECM}$$

→ Phase ist im Fixpunkt

Betrachte Phasengleichung auf der ECM : $A(t-\tau) = A(t) = A_c$

$$\Delta\dot{\phi} = (\omega_0 - \omega_c) + \frac{D}{A_c}\xi^b + k\sin\left(\Delta\phi(t-\tau) - \Delta\phi(t) - \omega_c\tau\right)$$

benutze: $\frac{d\Delta\phi}{dt} \approx \frac{\Delta\phi(t) - \Delta\phi(t-\tau)}{\tau}$

für kleines τ

$$\approx \omega_0 - \omega_c + \frac{D}{A_c}\xi^b + k\,\underbrace{\sin\left(-\tau\Delta\dot{\phi} - \omega_c\tau\right)}$$

Abschätzung von $\tau\Delta\dot{\phi}$: auf der ECM ist $\Delta\dot{\phi} = 0$, d.h. Änderung nur durch Rauschen

→ Taylor um $x_0 = -\omega_c\tau$

$$\Delta\dot{\phi} \approx \omega_0 - \omega_c + \frac{D}{A_c}\xi^b + k\left[\sin(-\omega_c\tau) - \tau\Delta\dot{\phi}\cos(-\omega_c\tau)\right]$$

1. Ordnung in $\tau\Delta\dot{\phi}$

ECM: $\omega_c - \omega_0 = -k\sin(\omega_c\tau)$

$$= \frac{D}{A^c} \xi^b - \tau \Delta\dot{\phi}\, k \cos(\omega_c \tau)$$

$$\boxed{\Delta\dot{\phi} \approx \frac{D}{A^c} \frac{1}{1 + \tau \cdot k \cos(\omega_c \tau)} \xi^b} \hat{=} \frac{D^{eff}}{A^c} \xi^b$$

- gilt nur für kleine τ, sonst zusätzliche Bifurkationen

- Linienbreite wird kleiner falls $\omega_c \tau = 0, 2\pi$