

Wellenpaket: + lineare Dispersionrelation ist nicht erfüllt  $\omega \neq v \cdot k$   
 + Gruppengeschwindigkeit  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$   
 + Phasengeschw.  $v_p = \frac{\omega}{k}$  i. A.  $v_g \neq v_p$   
 + sind Überlagerungen von ebenen Wellen  $v_g \leq c$

• Kugelwelle:  $\psi(r,t) = \frac{1}{r} [ A_+ e^{i(kr - \omega t)} + A_- e^{i(kr + \omega t)} ]$   
 erhaltende Welle  $\psi$  auslaufende Welle  $\psi$

$\rightarrow$  Ansatz:  $\underline{E}(r,t) = \frac{E_0}{r} e^{-i(kr - \omega t)}$  analog B

$\nabla \cdot \underline{E} = 0 \quad \nabla \cdot \underline{B} = 0 \rightarrow \underline{e}_r \perp \underline{E}_0 \quad \underline{e}_r \perp \underline{B}_0$

$\Delta_{\text{radial}} \frac{E_0}{r}(\vartheta, \varphi) = 0$  oder  $\Delta_{\text{radial}} E_{\vartheta, \varphi}(\vartheta, \varphi) = 0$

$\underline{E} = \frac{E_0}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \underline{e}_\varphi \propto (k, r - \omega t)$

$\underline{B} = \underline{e}_r \times \underline{E}$

$\nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{A}) - \Delta \underline{A} = \text{grad div } \underline{A} - \begin{pmatrix} \Delta & A_1 \\ & \Delta & A_2 \\ & & \Delta & A_3 \end{pmatrix}$

• in Materie  $\underline{D} = \epsilon \cdot \underline{E} \quad \underline{B} = \mu \underline{H} \quad \underline{j} = \underline{D} \cdot \underline{E}$

$\Rightarrow$  Dispersion  $\text{veränderte Phasengeschw. } v' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}} = \frac{c}{n}$

$n = \sqrt{\epsilon \cdot \mu}$

Was ist d. Feld einer gleichf. bew. PL

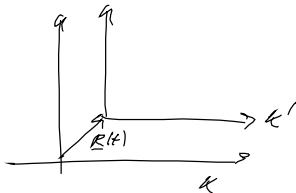
+ Lorenz-Eichung  $\nabla \cdot \underline{A} = -\frac{1}{c} \rho(r,t) \quad \rho = q \cdot \delta^{(3)}(r - \underline{v} \cdot t)$   
 $\nabla \cdot \underline{A} = -\frac{q}{c} \delta^{(3)}(r, t) \quad \underline{j} = +q \cdot \underline{v} \cdot \delta^{(3)}(r - \underline{v} \cdot t)$

### 5.7. Kovariante Formulierung

#### 5.7.1. Inertialsysteme & Galilei-Transform

Ein gleichförmig bewegtes KS heißt Inertialsystem.

• betrachte K und K' als 2 KS für  $t=0$  soll sich der Ursprung von K' bei  $R_0$  befinden  
 K' bewegt sich mit  $v$  in K



$\underline{R}(t) = \underline{R}_0 + \underline{v} \cdot t$

$\underline{r} = \underline{r}' + \underline{R}(t)$

$\underline{r}' = \underline{r} - \underline{R}_0 - \underline{v} \cdot t$

"Galilei-Transformation"

$t = t'$

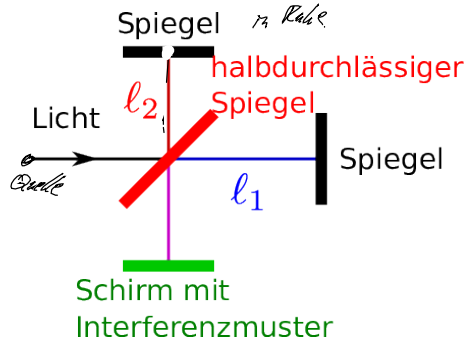
Zeit ist absolut

$$\underline{\dot{r}} = \underline{\dot{r}'} + \underline{v}$$

z. B. Newton  $\underline{F} = m \cdot \underline{\dot{r}}$  ist Galilei-invariant

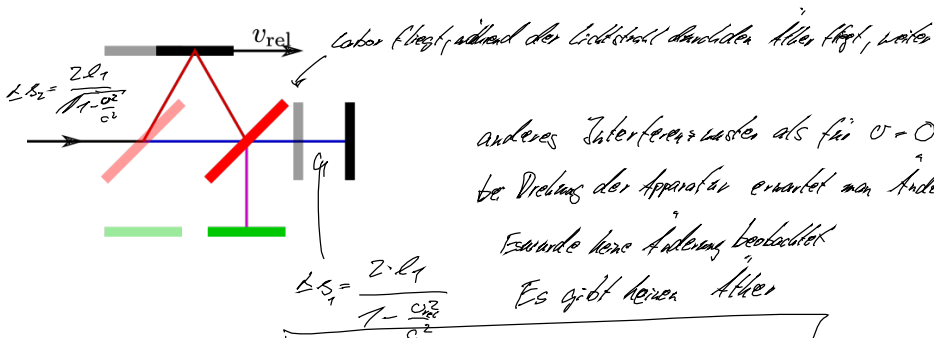
$$\underline{\ddot{r}} = \underline{\ddot{r}'}$$

### 5.7.2 Michelson-Morley Experiment & Lorentz-Transform



Michelson 1887 in Potsdam

$v_{\text{rel}} \approx 30 \text{ km/s}$



=> Postulat Einsteins

"Die LGS ist in allen IS konstant"  
 Vakuum

Prüfe WG unter Galilei-Transform  $x' = x - v \cdot t$   
 $t' = t$

Kettenregel:  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'}$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \cdot \frac{\partial}{\partial x'}$$

WG werden (1D):  $\partial_x^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 = (1 - \frac{v^2}{c^2}) \partial_{x'}^2 + \frac{2v}{c^2} \partial_{x'} \partial_{t'} - \frac{1}{c^2} \partial_{t'}^2$   
 nicht Galilei-invariant

o Raum und Zeit werden

$$\rightarrow x' = \bar{\alpha} x + \bar{\beta} \cdot c t$$

$$c t' = \bar{\gamma} \cdot x + \bar{\delta} \cdot c t$$

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}$  sind Fkt. von  $v$

für  $v \rightarrow 0$   $\bar{\alpha} \rightarrow 1; \bar{\delta} \rightarrow 1$   
 $\bar{\beta} \rightarrow 0; \bar{\gamma} \rightarrow 0$

o WG soll invariant bleiben

$$\partial_x^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \stackrel{!}{=} \partial_{x'}^2 - \frac{1}{c^2} \partial_{t'}^2$$

• Ursprung von  $K'$  ( $x'=0$ ) soll sich in  $K$  mit  $v$  bewegen  $x=v \cdot t$

$$\rightarrow 0 = \bar{\alpha} \cdot v \cdot t + \bar{\beta} \cdot c \cdot t \quad \rightarrow \quad \boxed{v = -\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}}$$

Kettenregel  $\partial_x = \bar{\alpha} \partial_{x'} + \frac{\bar{\gamma}}{c} \partial_{t'}$   
 $\partial_t = \bar{\beta} \cdot c \partial_{x'} + \bar{\delta} \partial_{t'}$

$$(\bar{\alpha} \partial_{x'} + \frac{\bar{\gamma}}{c} \partial_{t'}) (\bar{\alpha} \partial_{x'} + \frac{\bar{\gamma}}{c} \partial_{t'}) - \frac{1}{c^2} (\bar{\beta} \cdot c \partial_{x'} + \bar{\delta} \partial_{t'}) (\bar{\beta} \cdot c \partial_{x'} + \bar{\delta} \partial_{t'}) \stackrel{!}{=} \partial_{x'}^2 - \frac{1}{c^2} \partial_{t'}^2$$

$$\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2 = +1$$

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{\gamma} - \bar{\beta} \cdot \bar{\delta} = 0$$

$$\frac{\bar{\gamma}^2}{c^2} - \bar{\delta}^2 = -\frac{1}{c^2}$$

$$\bar{\alpha} = \bar{\delta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\bar{\gamma} = \bar{\beta} = \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$\rightarrow$  Lorentz-Inv.  $\#6$

4.10:  $\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$  Lorentz-Transfo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

(3+1) D bei  $v = v \cdot e_x$   $x' = x$   $y' = y$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\Lambda$

LT bei  $v = v \cdot e_x$   
 $\beta = \frac{v}{c}$   
 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

• Raum & Zeit mischen

• für  $v \ll c$  fällt dies auf Galilei-Transfo zurück

• z. B.  $v = v \cdot e_x$

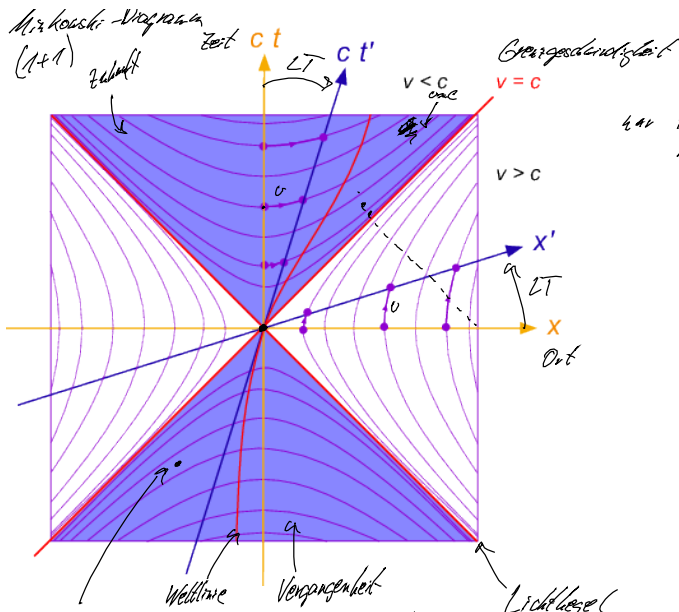
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\Lambda| = \gamma^2 - \beta^2 \cdot \gamma^2 = (1 - \beta^2) \cdot \gamma^2 = 1$$

vgl. Drehung  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• transversale Koord. bleiben gleich

...



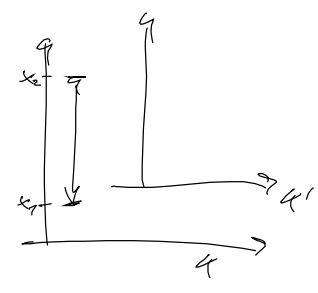
4.11 Ereignisse in d. Zukunft innerhalb des LZK  
können beeinflusst werden

Ereignisse  
von Ereignissen in Lichtkegel haben eine Wirkung haben auf den Ausgang  
(zeit < 0)

5.7.3. Beispiele Längenkontraktion & Zeitdilatation

- starrer Stab in  $K$ : Länge  $l = x_2 - x_1$
- bewegter Beobachter misst  $x'_1$  und  $x'_2$   
gleichzeitig  $t'_1 = t'_2$
- zwei Ereignisse

$$\underline{v} = v \cdot \underline{e}_x$$



$$ct'_i = \gamma ct_i - \beta \gamma x_i$$

$$x'_i = \gamma x_i - \beta \gamma ct_i$$

wegen  $t'_1 = t'_2 \rightarrow \gamma c t_1 - \beta \gamma x_1 = \gamma c t_2 - \beta \gamma x_2$

$$\beta \cdot (x_2 - x_1) = c \cdot (t_2 - t_1)$$

Länge in  $K'$ :  $x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) - \beta \gamma \beta (x_2 - x_1)$

$$= \gamma(1 - \beta^2)(x_2 - x_1) = \sqrt{1 - \beta^2} \cdot (x_2 - x_1) < x_2 - x_1$$

$$l' = \sqrt{1 - \beta^2} \cdot l = \frac{1}{\gamma} l$$

rel. Längenkontraktion

b) Zeitdilatation  
bei 2 Ereignissen in  $K$  bei  $x_1 = x_2$  (gleicher Ort)  
aber  $t_1 < t_2$

$$c \cdot \underbrace{(t_2' - t_1')} = \gamma \cdot c \cdot \underbrace{(t_2 - t_1)}_{\Delta t} - \beta \cdot \gamma \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{=0}$$

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \quad \gamma \geq 1$$

Zeit dilataion

Ablage erscheint verlangsamt

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Beispiel:  $\bar{v}$ -Nerven in ob. Atmosphäre bei ca 30 km Höhe  
 $\lambda_{Nf} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ s}$   $\lambda_{\text{Licht}} \approx 600 \text{ nm}$   
 $v_{\text{Nerven}} \approx 50 \rightarrow$  Hälfte d. Nervenzellen kommt an