Wdh. • Wellenpaket: + lineare Dispersionsrelation ist nicht erfüllt $\omega \neq c k$

+ Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

+ Phasengeschw. $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$

i. A. $v_g \neq v_{Ph}$

$v_g \leq c$

+ sind Überlagerungen von ebenen Wellen

• Kugelwelle: $\psi(r,t) = \frac{1}{r}\left[ A_+ e^{i(k\cdot r + \omega t)} + A_- e^{-i(k r - \omega t)} \right]$

einlaufende Welle, auslaufende Welle

$\rightsquigarrow$ Ansatz: $\underline{E}(\underline{r}, t) = \frac{\underline{E}_0}{r} e^{-i(k r - \omega t)}$ analog $B$

$\nabla \cdot \underline{E} = 0 \quad \nabla \cdot \underline{B} = 0 \rightsquigarrow \underline{e}_r \perp \underline{E}_0 \quad \underline{e}_r \perp \underline{B}_0$

$\Delta_{\vartheta,\varphi} \underline{E}_0(\vartheta, \varphi) = 0$ oder $\Delta_{\vartheta\varphi} E_{0,i}(\vartheta, \varphi) = 0$

$\underline{E} = \frac{E_0}{r \cdot \sin\vartheta} \cdot \underline{e}_\varphi \cos(k \cdot r - \omega t)$

$\underline{B} = \underline{e}_r \times \underline{E}$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \Delta A = \text{grad div } A - \begin{pmatrix} \text{div grad} & A_1 \\ \Delta & A_2 \\ \Delta & A_3 \end{pmatrix}$$

• in Materie $D = \varepsilon \cdot E \quad B = \mu H \quad j = \sigma_c E$

$\Rightarrow$ Dämpfung, veränderte Phasengeschw. $v' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} = \frac{c}{n}$

$n = \sqrt{\varepsilon \cdot \mu}$

Was ist d. Feld einer gleichf. bew. PL

+ Lorenz-Eichung $\Box \Phi = -4\pi \varrho(r,t) \qquad \varrho = q \cdot \delta^{(3)}(\underline{r} - \underline{v} \cdot t)$

$\Box A = -\frac{4\pi}{c} j(r,t) \qquad \underline{j} = +q \cdot \underline{v}\, \delta^{(3)}(\underline{r} - \underline{v} \cdot t)$

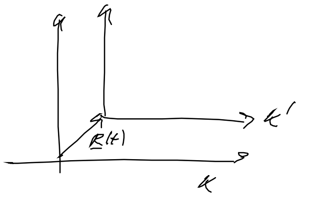
## 5.7. Kovariante Formulierung

### 5.7.1. Inertialsysteme & Galilei-Trafo

Ein gleichförmig bewegtes KS heißt Inertialsystem.

· betrachte $K$ und $K'$ als 2 KS für $t = 0$ soll sich der Ursprung von $K'$ bei $\underline{R}_0$ befinden

$K'$ bewegt sich mit $v$ in $K$




$\underline{R}(t) = \underline{R}_0 + \underline{v} \cdot t$

$\underline{r} = \underline{r}' + \underline{R}(t)$

$\underline{r}' = \underline{r} - \underline{R}_0 - \underline{v} \cdot t$

"Galilei-Transformation"

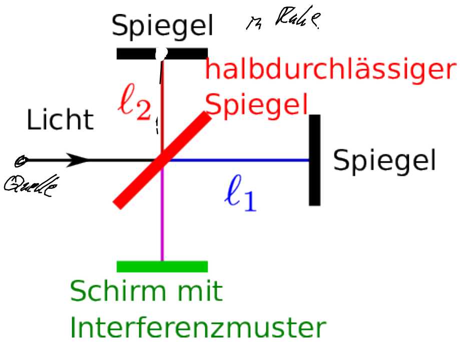
$t = t'$

Zeit ist absolut

$\dot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}}' + \underline{v}$ z.B. Newton $\underline{F} = m \cdot \ddot{\underline{r}}$ ist Galilei-invariant

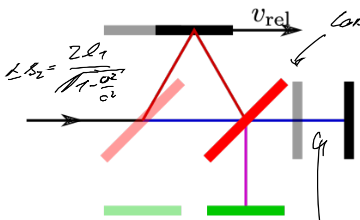
$\ddot{\underline{r}} = \ddot{\underline{r}}'$

## 5.7.2 Michelson-Morley Experiment & Lorentz-Trafo




Michelson 1881 in Potsdam

$v_{rel}^{wind} \approx 30\ km/s$




Labor fliegt, während der Lichtstrahl durch den Äther fliegt, weiter

anderes Interferenzmuster als für $v = 0$

bei Drehung der Apparatur erwartet man Änderung des Musters

Es wurde keine Änderung beobachtet

$$\Delta s_1 = \frac{2 \cdot \ell_1}{1 - \frac{v_{rel}^2}{c^2}}$$

Es gibt keinen Äther

=> Postulat Einstein: $\boxed{\text{"Die Vakuum-LGS ist in allen IS konstant"}}$

Prüfe WG unter Galilei-Trafo $x' = x - v \cdot t$, $t' = t$

Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \cdot \frac{\partial}{\partial x'}$$

WG wird zu (1D):

$$\partial_x^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\partial_{x'}^2 + \frac{2v}{c^2}\partial_{x'}\partial_{t'} - \frac{1}{c^2}\partial_{t'}^2$$

nicht Galilei-invariant

- Raum und Zeit mischen

$\longrightarrow$ $x' = \bar{\alpha} x + \bar{\beta} \cdot c t$

$c t' = \bar{\gamma} \cdot x + \bar{\delta} \cdot c t$

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}$ sind Fkt. von $v$

für $v \to 0$: $\bar{\alpha} \to 1$; $\bar{\delta} \to 1$; $\bar{\beta} \to 0$; $\bar{\gamma} \to 0$

- WG soll invariant bleiben

$$\partial_x^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \stackrel{!}{=} \partial_{x'}^2 - \frac{1}{c^2}\partial_{t'}^2$$

- Ursprung von $K'$ ($x'=0$) soll sich in $K$ mit $v$ bewegen $x = v \cdot t$

$$\rightarrow 0 = \bar\alpha \cdot v \cdot t + \bar\beta \cdot c \cdot t \longrightarrow \boxed{v = -\frac{\bar\beta}{\bar\alpha}}$$

Kettenregel $\partial_x = \bar\alpha \partial_{x'} + \frac{\bar\gamma}{c} \partial_{t'}$

$$\partial_t = \bar\beta \cdot c \cdot \partial_{x'} + \bar\delta \partial_{t'}$$

$$\left(\bar\alpha \partial_{x'} + \frac{\bar\gamma}{c}\partial_{t'}\right)\left(\bar\alpha \partial_{x'} + \frac{\bar\gamma}{c}\partial_{t'}\right) - \frac{1}{c^2}\left(\bar\beta \cdot c \partial_{x'} + \bar\delta \partial_{t'}\right)\left(\bar\beta \cdot c \partial_{x'} + \bar\delta \partial_{t'}\right) \stackrel{!}{=} \partial_{x'}^2 - \frac{1}{c^2}\partial_{t'}^2$$

$$\bar\alpha^2 - \bar\beta^2 = +1 \qquad \bar\alpha \cdot \bar\gamma - \bar\beta \cdot \bar\delta = 0$$

$$\frac{\bar\gamma^2}{\cancel{c^2}} - \frac{\bar\delta^2}{\cancel{c^2}} = \frac{-1}{\cancel{c^2}}$$

$$\bar\alpha = \bar\delta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \bar\gamma = \bar\beta = \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$\longrightarrow$ Lorentz-inv. WG

1+1 D:
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{Lorentz-Trafo}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

(3+1) D bei $\underline{v} = v \cdot \underline{e}_x$ $\qquad x' = x \qquad y' = y$

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{\Lambda}}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{LT bei } \underline{v} = v \cdot \underline{e}_x,\ \beta = \frac{v}{c},\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

- Raum & Zeit mischen
- für $v \ll c$ fällt dies auf Galilei-Trafo zurück

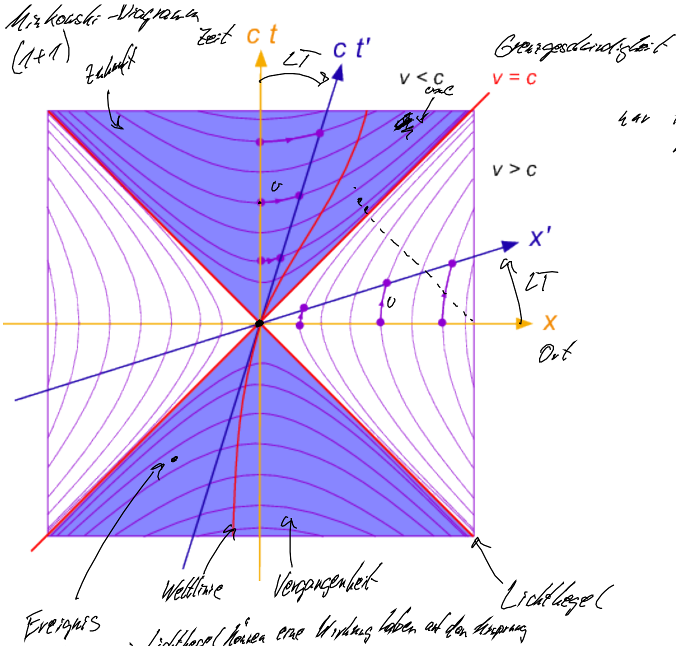
$$|\underline{\Lambda}| = \gamma^2 - \beta^2 \cdot \gamma^2 = (1-\beta^2)\cdot\gamma^2 = 1$$

- z. B. $\underline{v} = v\,\underline{e}_y$

$$\underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{vgl. Drehung} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- transversale Koord. bleiben gleich

Minkowski-Diagramm (1+1)



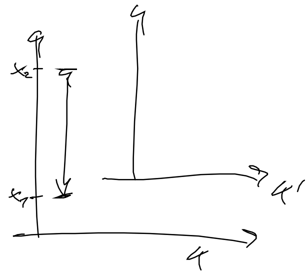

nur Ereignisse in d. Zukunft innerhalb des LK können beeinflusst werden

nur Ereignisse im Lichtkegel können eine Wirkung haben auf den Ursprung (x,ct<0)

## 5.7.3. Beispiele Längenkontraktion & Zeitdilatation

- starren Stab ruht in $K$: Länge $\ell = x_2 - x_1$
- bewegter Beobachter misst $x_1'$ und $x_2'$ gleichzeitig $t_1' = t_2'$

$\underline{v} = v \cdot \underline{e}_x$




- zwei Ereignisse

$$ct_i' = \gamma c t_i - \beta\gamma x_i$$
$$x_i' = \gamma \cdot x_i - \beta\gamma \cdot c t_i$$

wegen $t_1' = t_2' \rightarrow \gamma c \cdot t_1 - \beta\gamma \cdot x_1 = \gamma \cdot c\, t_2 - \beta\gamma \cdot x_2$

$$\beta \cdot (x_2 - x_1) = c \cdot (t_2 - t_1)$$

Länge in $K'$: $x_2' - x_1' = \gamma \cdot (x_2 - x_1) - \beta \cdot \gamma\, \beta (x_2 - x_1)$

$$= \gamma (1-\beta^2)(x_2 - x_1) = \sqrt{1-\beta^2} \cdot (x_2 - x_1) < x_2 - x_1$$

$$\boxed{\ell' = \sqrt{1-\beta^2} \cdot \ell} = \frac{1}{\gamma} \ell$$

rel. Längenkontraktion

### b) Zeitdilatation

betr. 2 Ereignisse in $K$ bei $x_1 = x_2$ (gleicher Ort) aber $t_1 < t_2$

$$c \cdot \underbrace{(t_2' - t_1')}_{\Delta t'} = \gamma \cdot c \underbrace{(t_2 - t_1)}_{\Delta t} - \beta \cdot \gamma \underbrace{(x_2 - x_1)}_{=0}$$

$$\boxed{\Delta t' = \gamma \, \Delta t \quad \text{Zeitdilatation}}$$

$\gamma \geq 1$ $\qquad$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Abfolge erscheint verlangsamt

Beispiel: $\pi$-Mesonen in ob. Atmosphäre bei ca. 30 km Höhe

HWZ $\approx 2 \cdot 10^{-6}$ s $\qquad$ $\Delta h_{\text{Galil.}} \approx 600$ m

$\gamma_{\text{meson}} \approx 50$ $\longrightarrow$ Hälfte d. Mesonen kommt an