WdH

- Lorentzkraft kontrav. kov. Vierergeschw.

$$m_0 \cdot \frac{d u^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} \cdot F^{\mu\nu} \cdot u_\nu$$

Ruhemasse, Eigenzeit, FS-Tensor $\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$

für $\mu \in \{1,2,3\}$: $\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\gamma m_0}_{m_{eff}} \cdot \underline{v}\right) = q \cdot \underline{E} + \frac{q}{c} \cdot \underline{v} \times \underline{B}$

- Trafo der Potentiale

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \underline{A} \end{pmatrix}' = \Lambda \begin{pmatrix} \Phi \\ \underline{A} \end{pmatrix}$$

- Trafo der Felder

$$F' = \Lambda F \Lambda$$

- tang. Komponenten der Felder bleiben gleich (in Richtung v)
- transv. Komp. mischen E & B

Falls $A^\mu(x^\mu)$ gegeben, muss x'^μ noch in das Laborsystem umgerechnet werden

- Doppler-Effekt $(k^\mu) = \begin{pmatrix} \omega/c \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ $\quad x_\mu k^\mu = \omega t \cdot \frac{\omega}{\omega} - \underline{r} \cdot \underline{k}$

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta \cdot \cos\vartheta} \qquad \beta = \frac{v}{c} \qquad \vartheta = \sphericalangle(\underline{v}, \underline{k})$$

6. Strahlung

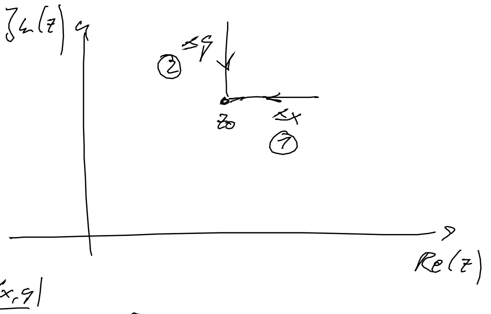
6.1. Einführung in die Fkt-Theorie

Fkt in $\mathbb{C}$: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$: $f(z)$

Notation $z \in \mathbb{C}$ $\quad z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$

$$f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



6.1.1. Diff. in $\mathbb{C}$

- analog zum Reellen $\quad f'(z) = \lim_{z' \to z} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z}$

Forderung
- GW muss existieren
- wegunabhängig sein

① $f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + i v(x+\Delta x, y) - u(x,y) - i v(x,y)}{\Delta x}$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

② $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}}$$

Cauchy-Riemannsche DGL

Real- & Imaginärteile von komplex diffbaren Fkt hängen zusammen

falls eine Fkt in einer U_ε-Umgebung von z_0 komplex diffbar ist, heißt sie auch "holomorph" in z_0

Bsp: • Polynome $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cdot z^n \qquad a_n \in \mathbb{C}$

• $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

• $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{(2n)!}$

$\Big\}\ e^z = \sum_n \frac{z^n}{n!} = \cos(z) + i \cdot \sin(z)$ $\Big\}$ alle holomorph in ganz $\mathbb{C}$

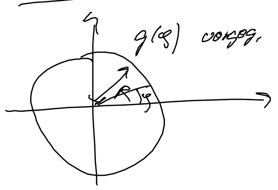
Gegenbsp: $\frac{1}{z}$ ist bei $z=0$ nicht holomorph

Eigensch. d. Ableitung + Kettenregel, Produktregel, Quotientenregel

+ $\{\partial_x^2 + \partial_y^2\}\, u(x,y) = 0$
$\{\partial_x^2 + \partial_y^2\}\, v(x,y) = 0$ $\Big\}$ Real- & Imaginär-Teile holomorpher Fkt erfüllen die 2d-Laplacegleichung

+ $f(z) = z^* z = |z|^2 = x^2 + y^2 \longrightarrow u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 0$
ist nicht holomorph

6.1.2. Beispiel Lösung der 2d-Laplace-Gleichung



$$\mathrm{Re}\left\{ f\left(R\cdot\cos\varphi + R\cdot i\cdot\sin\varphi\right)\right\} = u\left(R\cdot\cos\varphi, R\sin\varphi\right) \overset{\text{Vorgabe}}{=} g(\varphi)$$

z.B.: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n}_{\text{Koeffiz.}} \cdot z^n \quad \rightsquigarrow a_0 \in \mathbb{R}$

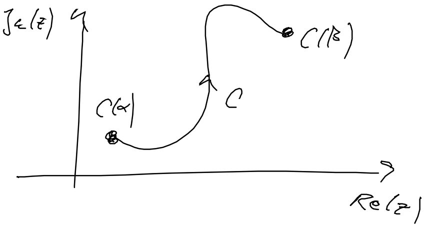
$$g(\varphi) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot R^n e^{-in\varphi}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{2}\left(a_n \cdot e^{+in\varphi} + a_n^* e^{-in\varphi}\right)$$

$n \geq 1$: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\, e^{-in\varphi}\, d\varphi \cdot \frac{2}{R^n} = a_n$

$n = 0$: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}(a_0 + a_0^*)$

$\rightsquigarrow u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left[a_n (x+iy)^n + a_n^* (x-iy)^n\right]$ • löst die 2d Laplace-Gl. • erfüllt die RB

6.1.2 Integrieren in $\mathbb{C}$



$$\int_C f(c)\,dc = \int_\alpha^\beta f(c(t))\,\frac{dc}{dt}\,dt$$

komplexe Integrale sind auf reelle zurück geführt.

Fundamentalbeispiel $\quad n\in\mathbb{Z} \qquad z(t) = z_0 + R\cdot e^{it} \qquad 0\le t\le 2\pi$

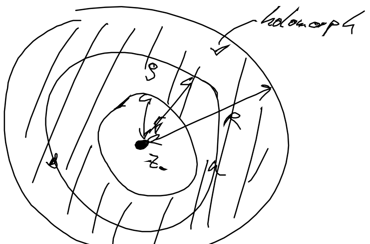
$$\oint_{S_R(z_0)} (z-z_0)^n\, dz = \int_0^{2\pi} dt\, R^n\cdot e^{in\cdot t}\cdot R\cdot i\, e^{it} = i\cdot R^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\cdot t}\, dt$$

Kreis um z_0 mit Radius R

$$= \begin{cases} \frac{R^{n+1}}{n+1}\, e^{i(n+1)\cdot t}\Big|_0^{2\pi} = 0 & n\neq -1 \\ 2\pi i & \text{sonst } (n=-1)\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\pi i & n=-1 \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

6.1.4. Laurent-Reihe



$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Entw.-koeffiz.

Sei $f(z)$ in einem Ring holomorph $\qquad a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{S_\varrho(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz \qquad \forall k\in\mathbb{Z}$

- falls $a_{k<0} = 0$ "hebbare Singularität"

Bsp $\lim_{z\to 0}\frac{\sin(z)}{z} = 1$

- "Pol der Ordnung m" $\quad a_k = 0 \quad \forall\, k < -m$

Bsp: $\frac{1}{(z-i)^7}$ Pol 7. Ordnung bei $z=+i$

$\frac{1}{(z-i)(z+i)^2}$ Pol 1. Ordnung bei $z=+i$, 2 " bei $z=-i$

- "essentielle Singularität" $\quad a_{-n}\neq 0 \quad \forall n>0$

z.B.: $e^{\frac{1}{z}}$

- a_{-1} ist besonders "Residuum" von $f(z)$ an z_0

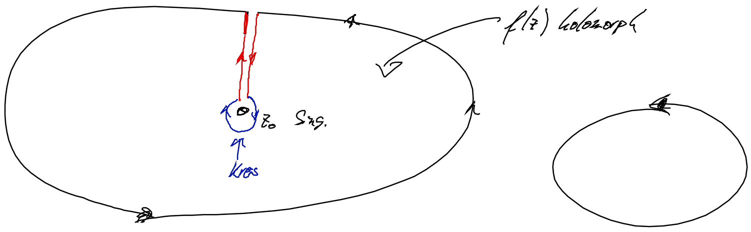
6.1.5. Cauchys Integralsatz

Sei $f(z)$ in G holomorph $(G\subset\mathbb{C})$ und sei C (geschl. Kurve) in G enthalten

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

Beweisidee: über IS von Stokes $\rightarrow$ Flächenintegral $\rightarrow 0$

Was wenn $f(z)$ Singularitäten hat (Pole)



$$\oint_{C'} f(z)\,dz = 0 = \oint_C f(z)\,dz + 0 + \oint_{\bar{S}_\varepsilon(z_0)} f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz - 2\pi i$$

$$\Rightarrow \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i$$

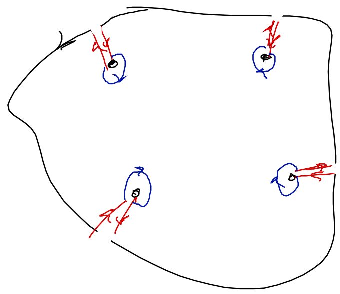
allgemein

$$\oint_C \frac{1}{z-z_0}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } z_0 \notin A(C) \\ 2\pi i & z_0 \in A(C) \end{cases}$$

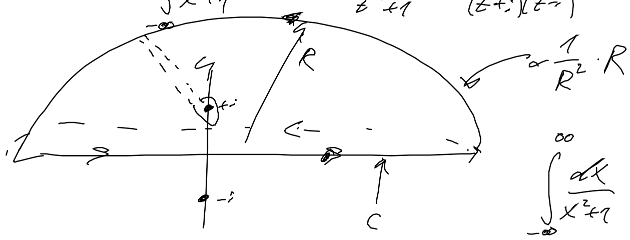
6.1.6. Residuensatz

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{S_\varepsilon(z_0)} f(z)\,dz \qquad \text{"Residuum"}$$

$$\boxed{\oint_{\partial G \text{ pos. Drehsinn}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)}$$



Bsp. $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi \qquad \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \oint_C \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=+i} \frac{1}{z^2+1}$$

$= 2\pi i \, \frac{\cancel{(z-i)}}{\cancel{(z-i)}(z+i)}\Big|_{z=i} = \frac{\cancel{2\pi i}}{\cancel{2i}}$

$= \pi$

für Pole n-ter Ordnung gibt es einen Trick

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1 \cdot (z-z_0) + \dots$$

$$(z-z_0)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + a_0 (z-z_0)^n + \dots$$

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-z_0)^n \cdot f(z) = (n-1)!\, a_{-1} + \frac{n!}{1!} a_0 (z-z_0) + \mathcal{O}\left((z-z_0)^2\right)$$

$$\boxed{a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-z_0)^n f(z)}$$

Vorschrift zur Ber. des Residuums

1. Ordnung $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)\cdot f(z)$