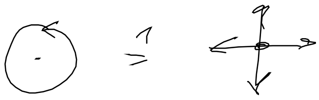
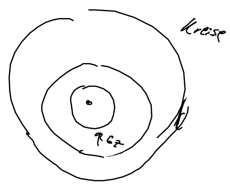
WdH Beispiele für Dipol-Strahlung

PL $\Rightarrow$ $\underline{p} \in \mathbb{R}^3$



$\hat{=}$ $\Rightarrow$ $\underline{p} \in \mathbb{C}^3$

Nachtrag G.C. Bohrsches Atom-Modell



Kreisbahn

Bahngeschw.

$$|F_{ZF}| = \frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} = |F_C|$$

Drehimpuls sei quantisiert $L = |r \times p| = m_e \cdot r \cdot v = \hbar \cdot n \quad n \in \{1,2,\dots\}$

$$r_n = \frac{(\hbar n)^2}{m_e e^2} \qquad v_n = \frac{e^2}{\hbar n}$$

$$\omega_n = \frac{v_n}{r_n} \qquad \omega_1 = \frac{v_1}{r_1} = 4 \cdot 10^{16}/s$$

in Strahlungsformel einsetz. $\quad a_B = \frac{\hbar^2}{m_e \cdot e^2} = 0{,}5 \cdot 10^{-10}\,m$

$$P = \frac{2}{3}\frac{\omega^4 a_B^2 e^2}{c^3}$$

eine PL auf Kreisbahn würde Energie abstrahlen & in den Kern stürzen

$$E_n = \frac{1}{2} m_e \cdot v_n^2 - \frac{e^2}{r_n} = \dots = -\frac{1}{2n^2}\frac{e^2}{a_B} \qquad n \in \{1,2,..\}$$

$$\tau_{St} \approx \mathcal{O}(10^{-10}\,s)$$

- Schwingkreis

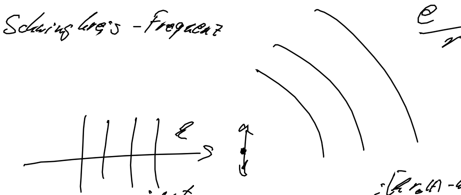
$$Q(t) = C \cdot U(t) \qquad I(t) = \frac{N_S}{C \cdot L} \cdot \Phi_S(t)$$

$(B_{Cond} = 0)$ Induktivität $(E_{Spule} \approx 0)$

$$\longrightarrow \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{L \cdot C} u(t) = 0$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$ Schwingkreis-Frequenz

$$\frac{e^{ikr}}{r}$$



- Modell für Streuung von Licht

Dämpfung

$$m_e \ddot{\underline{r}}_0 + m_e \cdot \Gamma \cdot \dot{\underline{r}}_0 + m_e \cdot \omega_0^2 \cdot \underline{r}_0 = -e \cdot \mathrm{Re}\, \underline{E}_0 e^{-i\omega t} \qquad \mathrm{Re}\,\underline{E}_0 e^{i[k \cdot r_0(t) - \omega t]}$$

$$\underline{p} = \frac{e^2/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \cdot \underline{E}_0 = \alpha_e(\omega) \cdot \underline{E}_0$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3}|p|^2 \cdot \sin^2\vartheta = \frac{c}{8\pi}\left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}|E_0|^2 \cdot \sin^2\vartheta$$

Teilchenphysik: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN_{out}/(dt \cdot d\Omega)}{dN_{in}/(dt \cdot dF)}$

hier: Energie statt Teilchen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)}{\langle |S_n| \rangle} \qquad \langle S_n \rangle = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2$$

diff. WQ: $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\Gamma^2\cdot\omega^2} \cdot \sin^2\vartheta \qquad \sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

ω_0: Bindungsstärke e^-, Γ: Dämpfung

a.) $\omega \to \infty$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 = \sigma_{Th} \qquad \text{Thomson-Streuung}$$

ist nicht ganz kompatibel mit Modell-Annahmen

realistisch ist $\lim_{\omega\to\infty} \sigma(\omega) \to 0$

b.) Maximum bei ω_0

$$\sigma = \sigma_{Th} \cdot \frac{\omega_0^2}{\Gamma^2}$$

$\longrightarrow$ Mössbauer-Effekt (res. Abstrahlung)

c.) $\omega \to 0$

$$\sigma \approx \sigma_{Th} \cdot \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \qquad \Gamma, \omega \ll \omega_0$$

$\lambda_{rot} \approx 700$ nm

$\lambda_{blau} \approx 400$ nm

$$\frac{\sigma_{blau}}{\sigma_{rot}} = \frac{\omega_{blau}^4}{\omega_{rot}^4} = \frac{\lambda_{rot}^4}{\lambda_{blau}^4} \approx 10$$

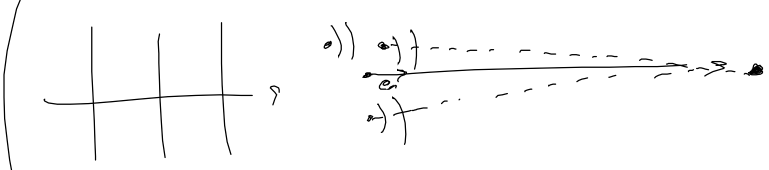
Himmel ist blau

Sonnenuntergänge sind rot } Rayleigh-Streuung

6.9. Formfaktor

betrachte N identische Streuzentren an Orten r_j $\quad j \in \{1, \ldots, N\}$

$P_j(t) \propto E(r_j, t)$ $\qquad$ Auslenkung am j-ten El. ist $\propto r_j$

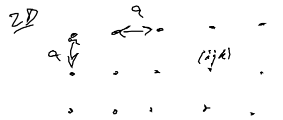


$\Rightarrow P \propto e^{i \underline{k} \cdot r_j}$ $\qquad e^{-i k \cdot \underline{e_r} \cdot r_j}$

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_N = \left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_1 \cdot \underbrace{\left|\sum_{j=1}^{N} e^{i(k-|k|\cdot e_r)\cdot r_j}\right|^2}_{|F(k-k\cdot e_r)|^2}$$

$$F(q) = \sum_{j=1}^{N} e^{i q\cdot r_j} = \int \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \delta(r-r_j)}_{\text{Teilchendichte}} \cdot e^{i q\cdot r}\, d^3r \qquad q = k - k\cdot e_r$$

Beispiel Röntgen-Strukturanalyse



$$r_{ijk} = a(i\cdot e_x + j\cdot e_y + k\cdot e_z) \qquad i,j,k \in \{0,\dots,N_i-1\}$$

$$F(q) = \sum_{i=0}^{N_x-1}\sum_{j=0}^{N_y-1}\sum_{k=0}^{N_z-1} e^{i q\cdot r_{ijk}}$$

$$\sum_{j=0}^{N_y-1} e^{i a\cdot j\cdot q_y} = \frac{1-e^{i N_y\cdot a\cdot q_y}}{1-e^{i a\cdot q_y}} = \frac{\sin\left(\frac{N_y\cdot a\cdot q_y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a\cdot q_y}{2}\right)} \cdot e^{i(N_y-1)\cdot a\cdot q_y/2}$$

$$|F(q)|^2 = \frac{N^2}{N_x^2 N_y^2 N_z^2} \frac{\sin^2\left(\frac{N_x a\cdot q_x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{a\cdot q_x}{2}\right)} \left(x\to y\right)\left(x\to z\right) \qquad N = \mathcal{O}(10^{23})$$

endlich nur falls $\boxed{q_i\cdot a = 2\pi n_i}$ $\quad n_i \in \mathbb{Z}$

Bragg-Bedingung

$$q^2 = k^2 + k^2 - 2k^2\cdot\cos\vartheta \qquad \vartheta = \sphericalangle(e_r, k)$$
$$= 2k^2[1-\cos\vartheta] = 4k^2\cdot\sin^2\frac{\vartheta}{2}$$
$$= \left(\frac{2\pi n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n_y}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n_z}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{q}{2k} = \frac{\lambda}{2a}\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2} \qquad n_i \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Bestimmung von a

Kohärente & inkohärente Streuung

$$|F(q)|^2 = \sum_{ij} e^{i q(r_i - r_j)} = N + 2\cdot\overset{\text{offdiag. Beiträge}}{\sum_{i<j}}\cdot\cos[q(r_i-r_j)]$$

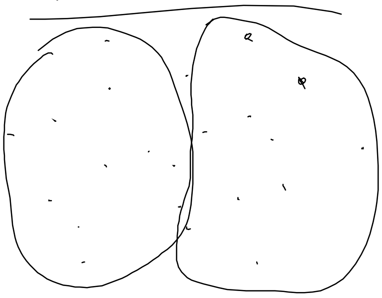
a.) Streuzentren liegen dicht beieinander $|\underline{r}_e - \underline{r}_j| \ll \lambda$

$$|F(\underline{q})|^2 \approx N^2$$

b.) Streuzentren liegen weit auseinander $|\underline{r}_e - \underline{r}_j| \gg \lambda$

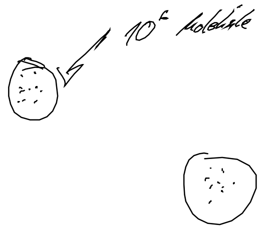
+ zufällige Verteilung $\qquad |F(\underline{q})|^2 \approx N$

Kond. von Wasserdampf



$\Longrightarrow$ Nebelbildung

10^6 Moleküle



$R \ll \lambda$

kohärente Streuung

$|F(\underline{q})|^2 \propto N^2$

$R \gg \lambda$

inkoh. Streuung

$|F(\underline{q})|^2 \propto N$

7. Optik

bisher: EM-Wellen im Vakuum
jetzt: in Medien & Grenzflächen

$\underline{D} = \varepsilon \cdot \underline{E} \qquad \underline{B} = \mu \cdot \underline{H}$

Verknüpfungsgleichungen sind für schnelle Oszill. falsch

FT: $\varrho(\underline{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varrho(\underline{r},\omega) \cdot e^{-i\omega t} \, d\omega$

$\varrho(\underline{r},\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varrho(\underline{r},t) \, e^{+i\omega t} \, dt$

analog $\underline{j}, \underline{E}, \underline{B}, \underline{D}, \underline{H}$

$\underline{E}(\underline{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \underline{E}(\underline{r},\omega) \cdot e^{-i\omega t} \, d\omega$

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla \cdot D = 4\pi \varrho & \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times E + \frac{1}{c} \partial_t B = 0 & \\ \nabla \times H - \frac{1}{c} \partial_t D = \frac{4\pi}{c} j & \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{D}(\underline{r},\omega) = 4\pi \varrho(\underline{r},\omega) \,;\; \nabla \cdot \underline{B}(\underline{r},\omega) = 0 \\ \nabla \times \underline{E}(\underline{r},\omega) - i \frac{\omega}{c} \underline{B}(\underline{r},\omega) = 0 \\ \nabla \times \underline{H}(\underline{r},\omega) + i \frac{\omega}{c} \underline{D}(\underline{r},\omega) = \frac{4\pi}{c} \cdot \underline{j}(\underline{r},\omega) \end{array}$$

1 Dipol $\quad \underline{P} = \alpha_e(\omega) \, \underline{E}$

Teilchendichte

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \chi(\omega) = [1 + 4\pi \cdot n \cdot \alpha_e(\omega)]$$

im Frequenzraum

$$\underline{D}(\underline{r},\omega) = \varepsilon(\omega)\cdot\underline{E}(\underline{r},\omega)$$

$$\underline{B}(\underline{r},\omega) = \mu(\omega)\cdot\underline{H}(\underline{r},\omega)$$

FT ersetzen

zurück:

$$\underline{D}(\underline{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \varepsilon(\omega)\cdot\underline{E}(\underline{r},\omega)\, e^{-i\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int d\omega\, \varepsilon(\omega)\int dt'\, \underline{E}(\underline{r},t')\, e^{-i\omega(t-t')}$$

$$= \int\left[\frac{1}{2\pi}\int d\omega\, \varepsilon(\omega)\cdot e^{-i\omega(t-t')}\right]\underline{E}(\underline{r},t')\,dt' \qquad \chi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \chi(\omega)\cdot e^{-i\omega\tau}\,d\omega$$

$$= \underline{E}(r,t) + \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(t-t')\cdot\underline{E}(\underline{r},t')\,dt'$$

nur $t'<t$ darf beitragen "Kausalität"

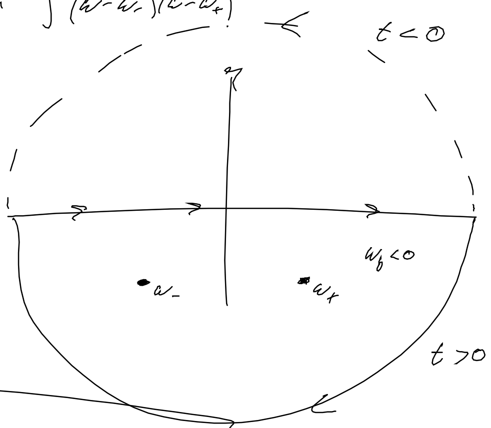
$$\chi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\Gamma\omega}$$

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\omega_p^2\, e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-i\Gamma\omega}\,d\omega = \frac{-1}{2\pi}\int\frac{\omega_p^2\, e^{-i\omega t}}{(\omega-\omega_-)(\omega-\omega_+)}\,d\omega$$

$\omega = \omega_x + i\omega_y$

$\Gamma > 0$

$$\omega_\pm = -i\frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/4}$$



$$\chi(t) = \omega_p^2\cdot\frac{\sin\left[\sqrt{\omega_0^2-\frac{\Gamma^2}{4}}\,t\right]}{\sqrt{\omega_0^2-\frac{\Gamma^2}{4}}}\times$$

$$\times\, e^{-\Gamma t/2}\cdot\Theta(t)$$

$$\boxed{\underline{D}(\underline{r},t) = E(r,t) + \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \chi(\tau)\,\underline{E}(r,t-\tau)\,d\tau}$$

Kausalität ist respektiert