

★ Ankündigung

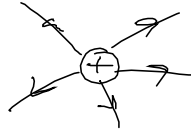
- Bachelor sgrup. 24.10.16⁰⁰ in BH-N 243
- 1.11. (Do) 16¹⁵ in EW 202
Physik. Kolloq.

- VL: Gauss-System
Ab: SI-System

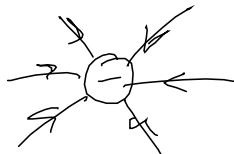
Wdh + Strömungslehre

Kont.-gl. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j j = 0$

+ Feldlinien



Quellen



Senken

+ Potential $\underline{E} = -\nabla \Phi(\underline{r})$

$$\Phi(\underline{r}) = \int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3r' \quad |$$

+ Dirac- δ in 3d

$$\delta(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

+ Grundgl. der ES

integ. Form $\oint_{\partial V} \underline{E} \cdot d\underline{S} = 4\pi \cdot q_V$

$$\oint \underline{E} \cdot d\underline{r} = 0$$

diff. Form $\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi \rho$

$$\nabla \times \underline{E} = 0$$

$$\left[\text{SE: } \nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \right]$$

$$\nabla \times \underline{E} = 0$$

+ Poisson-Gleichung $\Delta \Phi(\underline{r}) = -4\pi \rho(\underline{r})$

+ Energiedichte d. elekt. Feldes

$$W = \int d^3r w(r)$$

$$w(r) = \frac{1}{8\pi} |E(r)|^2$$



$$E_{SI} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right]^{-1} E_G$$

$$\rho_{SE} = \sqrt{4\pi\epsilon_0}^{-1} \cdot \rho_G$$

$$w(r) = \frac{1}{8\pi} |E(r)|^2$$

betr. Punktladung $E(r) = \frac{e}{r^2} \cdot \underline{e}_r$
 an Ursprung e^2

$$w(r) = \frac{e^2}{8\pi r^4}$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \int d\Omega \int_0^\infty r^2 \sin\theta dr \frac{e^2}{r^4}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty dr \frac{e^2}{r^2} = -\frac{e^2}{2r} \Big|_0^\infty \rightarrow \infty$$

Abschätzung der Gesamtenergie für endliche Ladung.

$$\frac{e^2}{2 \cdot r^{\text{min}}} = m_e \cdot c^2$$

$$r_e \equiv \frac{e^2}{m_e c^2} \quad \text{klass. El.-Radius}$$

$$= 2.8 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 2.8 \text{ fm}$$

Exp : $r_e < 10^{-3} \text{ fm} = 10^{-18} \text{ m}$

QED \rightarrow endl. Energie des e^-

1.9. Radialsymm. Ladungsverteilungen

+ Punktladung $\rho(r) = q \cdot \delta(r)$ $\rightarrow \Phi = \frac{q}{r} \rightarrow \underline{E} = \frac{q}{r^2} \underline{e}_r = \frac{q}{r^3} \underline{r}$

+ Kugelschale Radius R , Ladung q

$$\rho(r) = \frac{q}{4\pi R^2} \delta(r-R)$$

$$\Phi(r) = \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|} d^3r' = \frac{q}{4\pi R^2} \int_0^\infty dr' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-1}^1 dx' \frac{r'^2 \sin\theta' \delta(r'-R)}{\sqrt{r^2+r'^2-2r r' \cos\theta'}}$$

$$x = \cos\theta'$$

$$= \frac{q}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{r^2+R^2-2rRx}}$$

$$= \frac{q}{R} \Theta(R-r) + \frac{q}{r} \Theta(r-R)$$

↑
innerhalb

↑
außerhalb

$$\oint \underline{E} \cdot d\underline{S} = 4\pi \cdot q_v$$

$$\underline{r} < R \quad E(r) \cdot 4\pi r^2 = 0 \quad \rightarrow \quad E(r < R) = 0$$

$$\underline{r} > R \quad E(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q \quad \rightarrow \quad \underline{E}(r > R) = \frac{q}{r^2} \underline{e}_r$$

• homog. gel. Kugel

$$\rho(r) = \frac{q}{\frac{4\pi}{3} R^3} \Theta(R-r)$$

• kleine Abstände

$$\rho(r) = \frac{q}{8\pi a^3} e^{-r/2}$$

↑
charakt. Ausdehnung

vgl. B.M. H-Atom

$$\rho(r) = \frac{-e}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

Bohr'scher Radius

$$a_0 \approx 0.53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

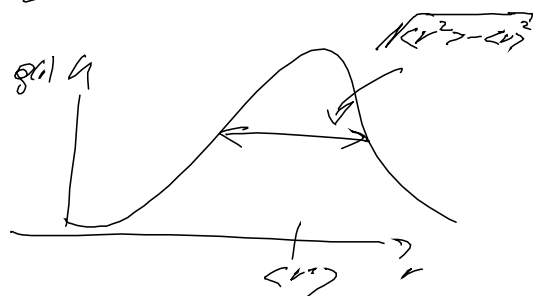
$$\lambda = \frac{a_0}{2}$$

• falls $\rho(r) \geq 0$

$$\langle r^k \rangle = \frac{\int d^3r r^k \rho(r)}{\int \rho(r) d^3r}$$

$$\langle r^1 \rangle \hat{=} \text{mittl. Radius}$$

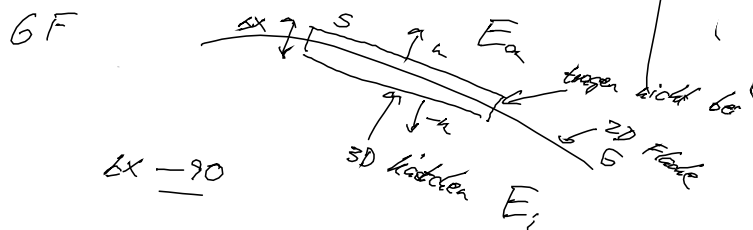
$$\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 \hat{=} \text{mittl. Schw.-quadrat}$$



1.10. Grenzflächen

an GF mit einer Flächenladungsdichte kann E sich stetig verhalten

$$[\underline{E}]_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow \sigma = \iint_S \underline{E}(\underline{n}) \cdot d\underline{S}$$



$$\oint \underline{E} \cdot d\underline{S} = 4\pi \sigma \cdot S = \epsilon_0 \cdot (\underline{E}_a - \underline{E}_i) \cdot \underline{n} \cdot S$$

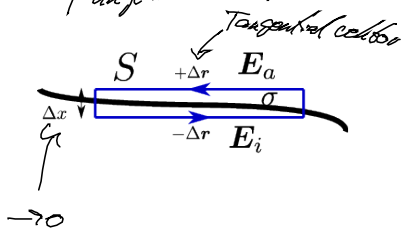
$$\underline{n} \cdot (\underline{E}_a - \underline{E}_i) = 4\pi \cdot \sigma$$

Normalen-Komp. von E hat einen Sprung an der GF

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \quad (\text{Bsp. Kugelschale})$$

$$E_a = \frac{q}{R^2}$$

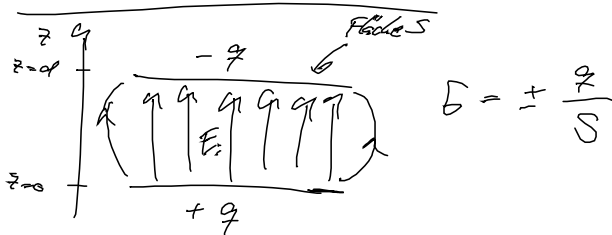
• Tangential-Komp.



$$0 = \oint \underline{E} \cdot d\underline{r} = (\underline{E}_a - \underline{E}_i) \cdot \underline{t} \cdot \Delta r$$

$$E_{a,t} = E_{i,t} \quad \text{Tang.-Komponente ist stetig}$$

1.11. Plattenkondensator



Annahmen + Platten sehr groß
+ außen versch. des el. Feld $E_a = 0$

$$(E_z - E_a) \cdot \frac{d}{z} = E_z \cdot \frac{d}{z} \equiv E = 4\pi d = 4\pi \frac{q}{S}$$

$$\Phi_z - \Phi_{z=0} = \int_0^d E(z) dz = -E \cdot d = -\frac{4\pi q \cdot d}{S} \equiv -U$$

Kapazität (allg.) $C \equiv \frac{q}{U}$

spez. PK: $C = \frac{S}{4\pi d}$ hängt nur von Geometrie ab

Energie-Dicht $w = \frac{1}{8\pi} E^2 = \frac{(4\pi d)^2}{8\pi} = 2\pi d^2$

Gesamt-Er.: $W = w \cdot S \cdot d = 2\pi d^2 \cdot S \cdot d$
 $= 2\pi q^2 \cdot \frac{d}{S} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$

1.12. Randwert-Probleme

Erinnerung Poisson-Gleichung

$$\Delta \Phi = -4\pi \rho$$

falls keine wst. RB geg. $\Phi(r) = \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|} d^3 r'$

$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) \rightarrow 0$ spez. (einfache) RB in Unendlichem

$\lim_{r \rightarrow \infty} \nabla \Phi(r) \rightarrow 0$

offe: + $\rho(r)$ in endlichen Volumen V gegeben

+ RB: $\Phi(\partial V)$ gegeben

- $\nabla \Phi(\partial V)$ gegeben

best. spez. Vektorfeld $A(r) = \rho(r) \cdot \nabla \chi(r)$

sein stetig diff bar auf V und ∂V

$$\operatorname{div} A = \operatorname{div}(\varphi(r) \cdot \nabla \psi(r)) = \varphi(r) \Delta \psi + (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \psi)$$

$$\int_V \operatorname{div} A \, d^3v = \oint_{\partial V} \underline{A} \cdot \underline{dS} = \oint_{\partial V} [\varphi(r) \nabla \psi(r)] \cdot \underline{n} \, dS$$

$$\boxed{[\nabla \psi] \cdot \underline{n} = \frac{\partial \psi}{\partial n}}$$

"Normalenableitung von ψ auf ∂V "

$$\int_V [\varphi \Delta \psi + (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \psi)] \, d^3v = \oint_{\partial V} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, dS \quad (1)$$

"1. Green'sches Theorem"

$$\int_V [\psi \Delta \varphi + (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \psi)] \, d^3v = \oint_{\partial V} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dS \quad (2)$$

$$(1) - (2): \int_V [\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi] \, d^3v = \oint_{\partial V} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \, dS$$

"2. Green'sches Theorem"

$$\text{Spez.-fall } \varphi = 1: \int_V \Delta \psi \, d^3v = \oint_{\partial V} \frac{\partial \psi}{\partial n} \, dS$$

Randwertproblem der Poisson-Gleichung

+ endl. Volumen V

+ Rand ∂V mit zus. Bedingungen an Φ

$$\varphi(r') \rightarrow \Phi(r')$$

$$\psi(r') \rightarrow \frac{1}{|r - r'|}$$

↑
Parameter

$$\text{z. Gr.T.: } \int_V \left[\Phi(r') \Delta_{r'} \frac{1}{|r - r'|} - \frac{1}{|r - r'|} \Delta_{r'} \Phi(r') \right] \, d^3r'$$

$$= -4\pi \int_V \Phi(r') \cdot \delta(r - r') \, d^3r' + 4\pi \int_V \frac{\varphi(r')}{|r - r'|} \, d^3r'$$

$$= \oint_{\partial V} \left[\Phi(r') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|r - r'|} - \frac{1}{|r - r'|} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right] \, dS'$$

falls $r \in V$

$$\Phi(r \in V) = \int_V \frac{\rho(r')}{|r-r'|} d^3r' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[\frac{1}{|r-r'|} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi(r') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|r-r'|} \right] dS'$$

wenn $\Phi(\partial V)$
 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\partial V)$ } vorgegeben
 "Cauchy" RB
 $\rho(r')$ in V

Problem: $\Phi(\partial V)$ müssen selbstkonsistent
 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\partial V)$ bestimmt werden

Klassifikation von RB + falls $\Phi(\partial V)$ vorgegeben "Dirichlet" RB
 + falls $\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\partial V)$ " von Neumann" RB
 + stückweise Φ oder $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ "gemischte" RB

Zusatz: ~~Es~~ entweder $\Phi(\partial V)$ oder $\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\partial V)$ vorgegeben

\Rightarrow Lsg. des RWP eindeutig

Seien $\varphi_1(r)$ und $\varphi_2(r)$ 2 Lsg. des RWP

- $\Delta \varphi_{1/2}(r) = -4\pi \rho(r)$
- Dirichlet $\varphi_1(r) = \varphi_2(r) \quad \forall r \in \partial V$
- oder von Neumann $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}(r) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}(r) \quad \forall r \in \partial V$

\Rightarrow betr. Differenz $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$
 $\Delta \varphi = 0$

Dirichlet $\varphi(\partial V) = 0$
 oder $\frac{\partial \varphi}{\partial n}(\partial V) = 0$

1. Green'sches Theorem
 $\varphi = \varphi = \bar{\varphi}$

$$\int_V (\underbrace{\bar{\varphi}}_0 \Delta \varphi + (\nabla \bar{\varphi}) \cdot (\nabla \varphi)) d^3r = \oint_{\partial V} \bar{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0$$

$$\int_V (\nabla \varphi)^2 d^3r = 0 \rightarrow \nabla \varphi = 0$$

$\varphi = \text{const.}$

Dirichlet: $\varphi_1 = \varphi_2$

von Neumann: $\varphi_1 = \varphi_2 + C$

\rightarrow Lösung des RWP ist bei Vorg. von either Dirichlet oder von Neumann RB eindeutig