Sprechst. Bruelbach bis 11^{00}

+Frage: Poyntingvektor & Feldimpuls für konst. Felder $D=E$ $B=H$

$$S = \frac{c}{4\pi} (E_0 \times B_0)$$ stat. & konstante Felder

$$\nabla \cdot S = 0$$

$$\partial_t \left[W_V^{mech} + W_V^{Feld} \right] = -\oint_{\partial V} \underline{S}\, d\underline{F} = -\int_V \nabla \cdot S\, d^3 r = 0$$

$$P_V^{Feld} = \frac{1}{c^2} \int S\, d^3 r = \frac{V}{4\pi c} E_0 \times B_0 \qquad \partial_t P_V^{Feld} = 0$$

$$(\partial_t P_V^{mech})_i = \oint \left(\sum_j T_{ij} n_j \right) dF$$

<u>WdH</u> Fall des Vakuums $D=E$ $B=H$ $\rho = 0$ $j=0$

$$\nabla \cdot E = 0 \qquad \nabla \times E = -\frac{1}{c} \partial_t B$$
$$\nabla \cdot B = 0 \qquad \nabla \times B = +\frac{1}{c} \partial_t E$$

$$\Box E_i = 0 \qquad \Box B_i = 0$$

Wellengleichungen $\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right\} \psi(\underline{r}, t) = 0$ $\quad \psi_\pm(r,t) = e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} \pm \omega t)}$

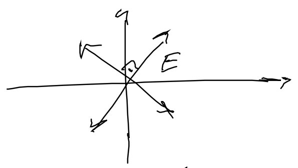
für feste ω muss die Disp.-Relation $\omega = c \cdot k$ erfüllt sein

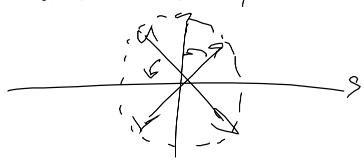
Phasengeschwindigkeit $v_{Ph} = \frac{\omega}{k} = c$

$$\underline{E} = \mathrm{Re}\left\{ \underline{E_0}\, e^{i[\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t]} \right\} \qquad \underline{B} = \mathrm{Re}\left\{ \underline{B_0}\, e^{i[\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t]} \right\}$$

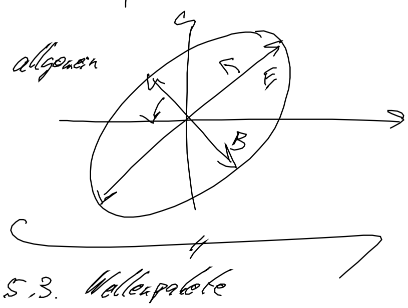
$$\underline{k} \cdot \underline{E_0} = 0 \qquad \underline{k} \cdot \underline{B_0} \qquad \underline{B_0} = e_k \times \underline{E_0}$$

lineare Polarisation $\underline{k} = k \cdot e_z$ $\quad$ zirkulare Polarisation





allgemein



5.5.3. Wellenpakete

$$\Box f(\underline{r}, t) = 0 \xrightarrow{\text{Lösung}} f_\pm(k \cdot r \pm \omega t) \quad : \quad \omega = c \cdot k$$

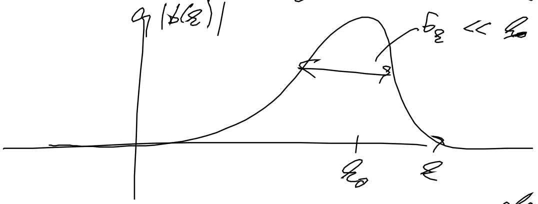
Überlagerung in 1D $F_\pm(z,t) = \int a(k) \cdot f_\pm(kz \pm \omega t)\, dk$ (für $\omega = ck$) erfüllt auch die Wellengl.

allgemeiner $H_\pm(z,t) = \int b(k) \cdot f_\pm(kz \pm \omega(k) \cdot t)\, dk$ mit $\omega(k) \neq c \cdot k$

können die WG trotzdem erfüllen

z.B.: $0 = \left(\partial_z^2 + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\int \underbrace{b(k)}_{\text{Gewichtsfunktion}}\, e^{i(kz \pm \omega(k)\cdot t)}\,dk$

$= \int b(k)\left[-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right] e^{i(kz \pm \omega(k) t)}\,dk$



betrachte $\omega(k) = \omega(k_0) + (k-k_0)\cdot \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0} + \ldots \approx \omega_0 + (k-k_0)\cdot v_g$

$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k=k_0}}$ "Gruppengeschwindigkeit"

$H_\pm(z,t) = \int b(k)\cdot e^{i[kz \pm \omega(k) t]}\,dk \approx \int b(k)\cdot \overbrace{e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)}\, e^{i(k-k_0)(z \pm v_g\cdot t)}}^{\text{heben sich weg}}\,dk$

$= e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} \int b(k_0+q)\, e^{iq(z \pm v_g\cdot t)}\,dq$

$= e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)}\, \underline{\tilde{H}_\pm^{k_0}(z \pm v_g t)}$

Phasengeschw. ω_0 — beschreibt die Propagation einer Wellenfront konst. Phase

Modulation

$z \pm v_g\cdot t = \text{const}$

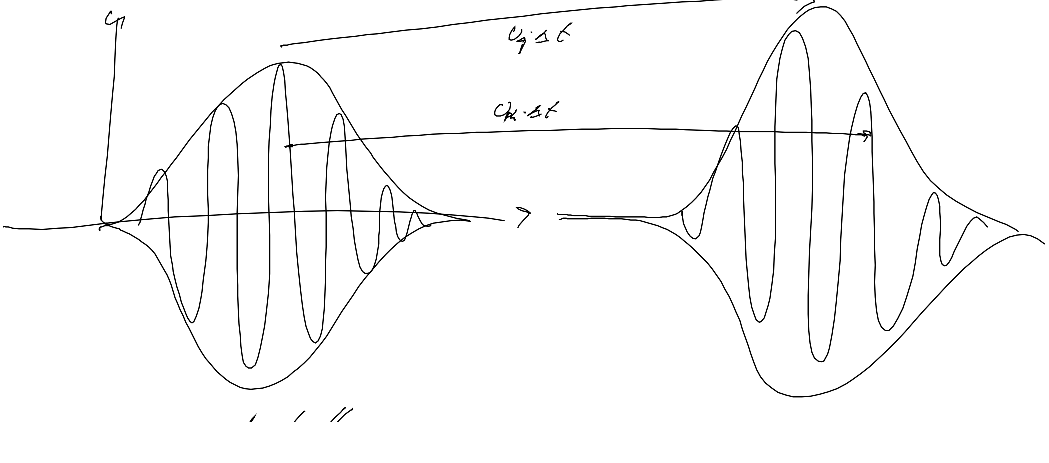
$\Rightarrow$ Modulation bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit

Beispiel $\quad b(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_k}\, e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma_k^2}}$

$H_\pm(z,t) = \frac{e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_k}\int [\ldots]\,dk \qquad\qquad \int e^{-\alpha x^2}\,dx \overset{\mathrm{Re}\,\alpha > 0}{=} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

$= e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)}\, e^{-\frac{\sigma_k^2}{2}(z \pm v_g\cdot t)^2}$

Phasengeschw. $\qquad$ Gruppengeschw.



5.5.4. Kugelwellen

Kugelwellen sind Lösungen der WG mit radialer Symmetrie $\psi(r,\vartheta,\varphi,t) = \psi(r,t)$

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) + \left(\Delta_{\vartheta,\varphi} \to 0\right)$$

$$\left\{\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right\}\psi(r,t)$$

- $\frac{1}{r}\left[\partial_r(r^2\partial_r)\psi\right] = 2\cdot\partial_r\psi + r\cdot\partial_r^2\psi = \partial_r^2[r\cdot\psi]$
- $\partial_t^2\psi = \frac{1}{r}\partial_t^2(r\cdot\psi)$

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right\}\underbrace{(r\cdot\psi)}_{\Phi} = 0 \qquad \left\{\partial_r^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right\}\Phi = 0$$

$$\boxed{\psi(r,t) = \frac{1}{r}\left[U_+(k\cdot r+\omega t) + U_-(k\cdot r-\omega t)\right] \qquad \omega = ck}$$

allg. radialsym. Lösung der WG

Wenn die Lösungen $U_\pm(x)$ periodisch sind, spricht man von Kugelwellen

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r}\left[A_+ e^{+i(kr+\omega t)} + A_- e^{+i(k\cdot r-\omega t)}\right]$$

A_+: einlaufende Welle, A_-: auslaufende Welle

Ansatz $\underline{E} = \frac{\underline{E_0}}{|r|}\cdot e^{i(k\cdot|r|-\omega t)}$

(e_r, E_0, B_0) bilden ein Rechtssystem

5.6 Lösungen in Materie

nur lineare Medien $\underline{B} = \mu\cdot\underline{H}$ $\quad \underline{D} = \varepsilon\cdot\underline{E}$

mit lok. Ohmschen Gesetz $\quad \underline{j} = \sigma_c\cdot\underline{E}$

σ_c: el. Leitfähigkeit

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\frac{\mu}{c} \partial_t (\nabla \times H) = -\frac{\mu \cdot \varepsilon}{c^2} \partial_t^2 E - \frac{\mu}{c} \cdot \frac{4\pi}{c} \cdot \sigma_c \, \partial_t E$$

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \partial_t B \qquad \nabla \times H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \cdot j$$

$$D = \varepsilon E$$

$$j = \sigma E$$

$$= \nabla \underbrace{(\nabla \cdot E)}_{\frac{4\pi \varrho}{\varepsilon}} - \Delta E \qquad \nabla \cdot D = 4\pi \varrho$$

$$\boxed{\frac{4\pi}{\varepsilon} \nabla \cdot \varrho = \Delta E - \frac{\mu \cdot \varepsilon}{c^2} \partial_t^2 E - \frac{4\pi \mu \cdot \sigma_c}{c^2} \partial_t E}$$ inhomog. Wellengleichung

$$\boxed{0 = \Delta B - \frac{\mu \cdot \varepsilon}{c^2} \partial_t^2 B - \frac{4\pi \mu \sigma_c}{c^2} \partial_t B}$$

Löse nur den homog. Anteil ($\varrho = 0$) $\quad E(r,t) = E_k e^{i(k \cdot r - \omega(k) \cdot t)}$

$$-k^2 + \frac{\mu \cdot \varepsilon}{c^2} \omega^2 + \frac{4\pi \mu \cdot \sigma_c}{c^2} (i\omega) = 0$$

Löse nach ω auf

$$\omega_\pm = -\frac{2\pi i \sigma_c}{\varepsilon} \pm \frac{kc}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 \mu \sigma_c^2}{\varepsilon \cdot k^2 c^2}}$$ Dispersionsrelation im Medium

a.) $\sigma_c \to 0$

Isolator

$$\omega_\pm = \pm \frac{k \cdot c}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} - 2\pi i \frac{\sigma_c}{\varepsilon}$$ Dämpfung

für $\sigma_c = 0$ folgt veränderte Wellen-Phasengeschwindigkeit

$$v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = \frac{c}{n} \qquad n = \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}$$

Brechungsindex des Mediums

b.) $\sigma_c \to \infty \qquad \omega_+ = -i \frac{k^2 c^2}{4\pi \mu \sigma_c} \qquad \omega_- = -i \frac{4\pi \sigma_c}{\varepsilon}$

Es gibt immer eine Dämpfung

Motivation der kovarianten Formulierung

$\Box \Phi = -4\pi \rho$

$\Box A = -\frac{4\pi}{c} j$

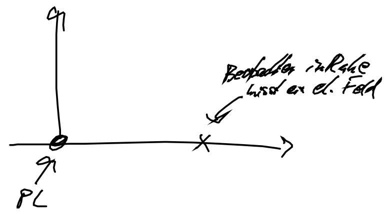
in Lorentz-Eichung

Annahme: Äther ist das Medium für die Lichtausbreitung

Erst Widerlegung der Äther-Theorie führte zu SRT (Einst. 1905)

1881/87 Michelson/Morley

in ED



Es gibt sowohl ein elektr.
als auch ein magnet. Feld