Sprechst. Briedbach bis 11^{00}

+Frage: Poyntingvektor & Feldimpuls für konst. Felder $D=E$ $B=H$

$$S = \frac{c}{4\pi} [E_0 \times B_0]$$ stat. & konstante Felder

$$\nabla \cdot S = 0$$

$$\partial_t [W_V^{mech} + W_V^{Feld}] = -\oint_{\partial V} \underline{S}\, d\underline{F} = -\int_V \nabla \cdot S\, d^3 r = 0$$

$$P_V^{Feld} = \frac{1}{c^2} \int S\, d^3 r = \frac{V}{4\pi c} E_0 \times B_0 \qquad \partial_t P_V^{Feld} = 0$$

$$(\partial_t P_V^{mech})_i = \oint \left(\sum_j T_{ij}\, n_j\right) dF$$

Wdh Fall des Vakuums $D=E$ $B=H$ $\varrho=0$ $j=0$

$$\nabla \cdot E = 0 \qquad \nabla \times E = -\frac{1}{c} \partial_t B$$
$$\nabla \cdot B = 0 \qquad \nabla \times B = +\frac{1}{c} \partial_t E$$

$$\Box E_j = 0 \qquad \Box B_j = 0$$

Wellengleichungen $\left\{\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2\right\} \psi(\underline{r}, t) = 0$ $\quad \psi_\pm(r,t) = e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} \pm \omega t)}$

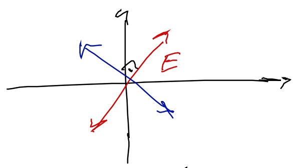
für feste ω muss die Disp.-Relation $\omega = c \cdot k$ erfüllt sein

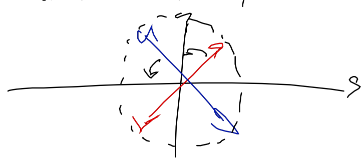
Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \frac{\omega}{k} = c$

$$\underline{E} = Re\left\{\underline{E}_0\, e^{i[\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t]}\right\} \qquad \underline{B} = Re\left\{\underline{B}_0\, e^{i[\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t]}\right\}$$

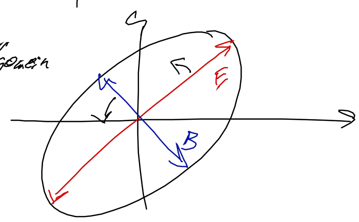
$$\underline{k} \cdot \underline{E}_0 = 0 \qquad \underline{k} \cdot \underline{B}_0 \qquad \underline{B}_0 = \underline{e}_k \times \underline{E}_0$$

Lineare Polarisation $\underline{k} = k \cdot \underline{e}_z$ zirkulare Polarisation





allgemein



5.5.3. Wellenpakete

$$\Box f(\underline{r}, t) = 0 \xrightarrow{\text{Lösung}} f_\pm(k \cdot r \pm \omega t) \quad : \quad \omega = c \cdot k$$

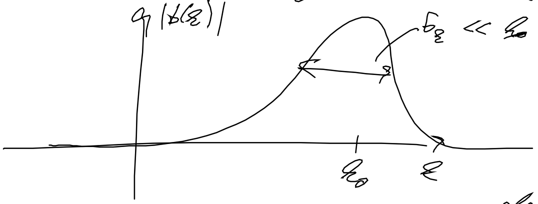
Überlagerung in 1D $F_\pm(z,t) = \int a(k) \cdot f_\pm(kz \pm \omega t)\, dk$ erfüllt auch die Wellengl. $\quad$ für $\omega = ck$

allgemeiner $H_\pm(z,t) = \int b(k) \cdot f_\pm(kz \pm \omega(k) \cdot t)\, dk$ mit $\omega(k) \neq c \cdot k$

können die WG trotzdem erfüllen

z.B.: $$0 = \left(\partial_z^2 + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) \int \underset{\text{Gewichtsfunktion}}{b(k)}\, e^{i(kz \pm \omega(k)\cdot t)}\, dk$$

$$= \int b(k) \left[-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right] e^{i(kz \pm \omega(k) t)}\, dk$$



betrachte $\omega(k) = \omega(k_0) + (k-k_0)\cdot \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} + \dots \approx \omega_0 + (k-k_0)\cdot v_g$

$$\boxed{v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}}$$ "Gruppengeschwindigkeit"

$$H_\pm(z,t) = \int b(k)\cdot e^{i[kz \pm \omega(k)\cdot t]}\, dk \approx \int b(k)\cdot \overbrace{e^{i(k_0\cdot z \pm \omega_0\cdot t)}\, e^{i(k-k_0)(z \pm v_g\cdot t)}}^{\text{heben sich weg}}\, dk$$

$$= e^{i(k_0 z \pm \omega_0\cdot t)} \int b(k_0+q)\, e^{iq(z \pm v_g\cdot t)}\, dq$$

$$= \underset{\text{Phasengeschw. } \omega_0}{e^{i(k_0 z \pm \omega_0\cdot t)}}\; \underbrace{\tilde{H}^{k_0}_\pm(z \pm v_g\cdot t)}_{\text{Modulation}}$$

beschreibt die Propagation einer Wellenfront konst. Phase

$z \pm v_g\cdot t = \text{const}$

=> Modulation bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit

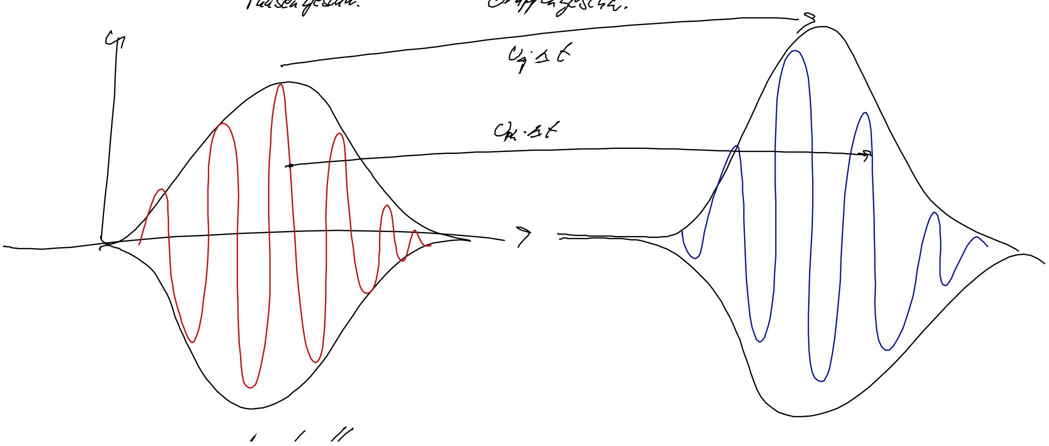
Beispiel $b(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_k}\, e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma_k^2}}$

$\mathrm{Re}\,\alpha > 0$

$$\int e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$H_\pm(z,t) = \frac{e^{i(k_0\cdot z \pm \omega_0 t)}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_k} \int [\dots]\, dk$$

$$= \underset{\text{Phasengeschw.}}{e^{i(k_0\cdot z \pm \omega_0\cdot t)}}\; \underset{\text{Gruppengeschw.}}{e^{-\frac{\sigma_k^2}{2}(z \pm v_g\cdot t)^2}}$$



5.5.4. Kugelwellen

Kugelwellen sind Lösungen der WG mit radialer Symmetrie $\quad \psi(r,\vartheta,\varphi,t) = \psi(r,t)$

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) + \left(\Delta_{\vartheta,\varphi} \to 0\right)$$

$$\left\{\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right\}\psi(r,t)$$

- $\frac{1}{r}\left[\partial_r(r^2\partial_r)\psi\right] = 2\cdot\partial_r\psi + r\cdot\partial_r^2\psi = \partial_r^2[r\cdot\psi]$
- $\partial_t^2\psi = \frac{1}{r}\partial_t^2(r\cdot\psi)$

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right\}\underbrace{(r\cdot\psi)}_{\Phi} = 0 \qquad \left\{\partial_r^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right\}\Phi = 0$$

$$\boxed{\psi(r,t) = \frac{1}{r}\left[U_+(k\cdot r+\omega t) + U_-(k\cdot r-\omega t)\right] \qquad \omega = ck}$$

allg. radialsym. Lösung der WG

Wenn die Lösungen $U_\pm(x)$ periodisch sind, spricht man von Kugelwellen

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r}\left[\underset{\substack{\uparrow\\ \text{einlaufende Welle}}}{A_+}e^{+i(kr+\omega t)} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{auslaufende Welle}}}{A_-}e^{+i(k\cdot r-\omega t)}\right]$$

Ansatz $\quad \underline{E} = \frac{\underline{E_0}}{|r|}\cdot e^{i(k\cdot|r|-\omega t)}$

(e_r, E_0, B_0) bilden ein Rechtssystem

5.6 Lösungen in Materie

nur lineare Medien $\quad \underline{B} = \mu\cdot\underline{H} \quad \underline{D} = \varepsilon\cdot\underline{E}$

mit lok. Ohmschen Gesetz $\quad \underline{j} = \sigma_c\cdot\underline{E}$

σ_c: el. Leitfähigkeit

$$\nabla\times(\nabla\times E) = -\frac{\mu}{c}\partial_t(\nabla\times H) = -\frac{\mu\cdot\varepsilon}{c^2}\partial_t^2 E - \frac{\mu}{c}\cdot\frac{4\pi}{c}\cdot\sigma_c\,\partial_t E$$

$$\nabla\times E = -\frac{1}{c}\partial_t B$$

$$\nabla\times H = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\cdot j$$

$$D = \varepsilon E$$

$$j = \sigma E$$

$$= \nabla\underbrace{(\nabla\cdot E)}_{\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}} - \Delta E$$

$$\nabla\cdot D = 4\pi\rho$$

$$\boxed{\frac{4\pi}{\varepsilon}\nabla\cdot\rho = \Delta E - \frac{\mu\cdot\varepsilon}{c^2}\partial_t^2 E - \frac{4\pi\mu\cdot\sigma_c}{c^2}\partial_t E}$$ inhomog. Wellengleichung

$$\boxed{0 = \Delta B - \frac{\mu\cdot\varepsilon}{c^2}\partial_t^2 B - \frac{4\pi\mu\sigma_c}{c^2}\partial_t B}$$

Löse nur den homog. Anteil $(\rho = 0)$ $\quad E(r,t) = E_k e^{i(k\cdot r - \omega(k)\cdot t)}$

$$-k^2 + \frac{\mu\cdot\varepsilon}{c^2}\omega^2 + \frac{4\pi\mu\cdot\sigma_c}{c^2}(i\omega) = 0$$

Löse nach ω auf

$$\omega_\pm = -\frac{2\pi\,\sigma_c}{\varepsilon}\,i \pm \frac{kc}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{1 - \frac{4\pi^2\mu\,\sigma_c^2}{\varepsilon\cdot k^2 c^2}}$$ Dispersionsrelation im Medium

a.) $\sigma_c \to 0$

Isolator

$$\omega_\pm = \pm\frac{k\cdot c}{\sqrt{\mu\cdot\varepsilon}} - 2\pi i\,\frac{\sigma_c}{\varepsilon}$$ ← Dämpfung

für $\sigma_c = 0$ folgt veränderte Wellen-Phasengeschwindigkeit

$$v_{Ph} = \frac{c}{\sqrt{\mu\cdot\varepsilon}} = \frac{c}{n} \qquad n = \sqrt{\mu\cdot\varepsilon}$$

Brechungsindex des Mediums

b.) $\sigma_c \to \infty$ $\quad \omega_+ = -i\,\frac{k^2 c^2}{4\pi\mu\sigma_c} \qquad \omega_- = -i\,\frac{4\pi\,\sigma_c}{\varepsilon}$

Es gibt immer eine Dämpfung

Motivation der kovarianten Formulierung

$\Box \Phi = -4\pi \rho$

$\Box A = -\frac{4\pi}{c} j$

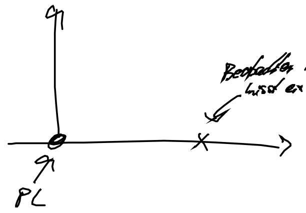
in Lorentz-Eichung

Annahme: Äther ist das Medium für die Lichtausbreitung

Erst Widerlegung der Äther-Theorie führte zu SRT (Einst. 1905)

1881/87 Michelson/Morley

in ED



Es gibt sowohl ein elektr. als auch ein magnet. Feld