

↔

$$\chi^*(\omega) = \chi(-\omega^*) \quad \text{folgt aus } \chi(\tau) \in \mathbb{R}$$

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) e^{+i\omega\tau} d\tau$$

$$\chi^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) e^{-i\omega^*\tau} d\tau = \chi(-\omega^*)$$

Schrittweise aufbauen: Kausalität fordern $\chi(\tau) = f(\tau) \cdot \Theta(\tau)$

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) e^{+i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \chi(t) e^{+i\omega t} dt \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow \chi(\omega)$ ist holomorph für $\text{Im } \omega > 0$

$$\omega = \omega_r + i\omega_i$$

$$e^{+i\omega t} = e^{-\omega_i t} e^{+i\omega_r t}$$

Pole von $\chi(\omega)$ müssen in der untl. H.E. liegen

halten $\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi k_0 e^2 / \omega e}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma \omega}$ für 1 geb. e^- z.B. H

für jedes Atom Z Elektronen ω_j, Γ_j $Z = \sum_j f_j$ # d. gleich geb. Elektronen

T-Werte der Atome

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi k_0 \cdot e^2}{4\pi e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\Gamma_j \omega}$$

Lorentz-Modell Radius von j -ten e^- Dämpfung von j -ten e^-

7.2. Wellenlösungen in Vakuum

$$\underline{E}(\underline{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \underline{E}(\underline{r}, t) \cdot e^{+i\omega t} dt$$

betrachte FT-MWG keine freien Ladungen & Ströme

$$\rho(\underline{r}, \omega) = 0$$

$$\underline{j}(\underline{r}, \omega) = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}, \omega) = 0 \quad \nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}, \omega) = 0$$

$$\nabla \times \underline{E}(\underline{r}, \omega) - i\frac{\omega}{c} \underline{B}(\underline{r}, \omega) = 0 \quad \nabla \times \underline{B}(\underline{r}, \omega) + i\frac{\omega}{c} \mu(\omega) \epsilon(\omega) \cdot \underline{E}(\underline{r}, \omega) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{E}(\underline{r}, \omega)) = -\Delta \underline{E}(\underline{r}, \omega) \Rightarrow$$

$$-\Delta \underline{E}(\underline{r}, \omega) - i\frac{\omega}{c} \left(-i\frac{\omega}{c} \mu(\omega) \cdot \epsilon(\omega) \right) \underline{E}(\underline{r}, \omega) = 0$$

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \mu(\omega) \cdot \epsilon(\omega) \right] \cdot \underline{E}(\underline{r}, \omega) = 0 \quad \text{Wellengl. (analog } \underline{B}(\underline{r}, \omega))$$

kann komplex sein

Ansatz $\underline{E}(\underline{r}, \omega) = \underline{E}_0 e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}}$ $\underline{B}(\underline{r}, \omega) = \underline{B}_0 \cdot e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}}$

$$\Rightarrow \underline{k} \cdot \underline{E}(\underline{r}, \omega) = i \cdot k_z \underline{E}(\underline{r}, \omega)$$

$$\underline{k} \cdot \underline{E}_0 = 0 \quad \underline{k} \cdot \underline{B}_0 = 0 \quad \underline{k} \perp \underline{E}_0, \underline{B}_0$$

$$\underline{E} \times \underline{E}_0 - \frac{\omega}{c} \underline{B}_0 = 0 \quad \underline{E} \times \underline{B}_0 + \frac{\omega}{c} \mu(\omega) \cdot \epsilon(\omega) \cdot \underline{E}_0 = 0$$

$$\text{SP} \rightarrow \omega^2 = \frac{c^2 \cdot \underline{E}^2}{\epsilon(\omega) \cdot \mu(\omega)} \in \mathbb{C}$$

$$= \frac{c^2 \cdot \underline{E}^2}{n^2(\omega)}$$

$$\underline{E} \cdot \underline{E} = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 \in \mathbb{C}$$

$$\text{Brechungsindex } n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega) \cdot \mu(\omega)} \in \mathbb{C}$$

$$= n_r(\omega) + i k(\omega)$$

$$\text{Vakuum: } n_r(\omega) = 1 \quad k(\omega) = 0$$

$$\text{im Allg: } \underline{E} = \underbrace{E_r(\omega)}_{\text{Schw\u00e4chung}} + i \underbrace{E_i(\omega)}_{\text{D\u00e4mpfung / Verst\u00e4rkung}}$$

$$\text{Bsp Ausbreitung in } x\text{-Richtung } \underline{E} = \begin{pmatrix} \beta + i \frac{\alpha}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e^{i \underline{E} \cdot \underline{r}} = e^{i \beta \cdot x - \frac{\alpha}{2} \cdot t}$$

$$\epsilon(\omega) \cdot \mu(\omega) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} = \left(\beta + i \frac{\alpha}{2} \right)^2 = \epsilon^2$$

$$\text{Re } \epsilon(\omega) \cdot \mu(\omega) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} = \beta^2 - \frac{\alpha^2}{4} \quad \text{Im } \epsilon(\omega) \cdot \mu(\omega) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} = \beta \cdot \alpha$$

Johannsen f\u00fcllt in Ausbreitungswinkel wie $e^{-\alpha x}$

$$\text{empirisch } \mu(\omega) \approx 1 \quad \text{geringe Absorption } \alpha \ll \beta \quad \alpha\text{-Absorptions-Koeffizient}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\text{Im}(\epsilon)}{\text{Re}(\epsilon)} \cdot \beta \quad \beta \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\text{Re} \epsilon(\omega)}$$

7.3. Die dielektrische Funktion

7.3.1 Kramers-Kronig-Relation

$\epsilon(\omega)$ respektiere die Kausalit\u00e4t $\rightarrow \epsilon(\omega)$ ist holomorph f\u00fcr $\text{Im } \omega \geq 0$

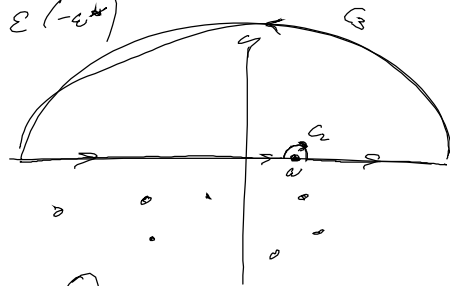
$$\epsilon(\bar{\omega}) \text{ reell} \quad \rightarrow \epsilon^*(\omega) = \epsilon(-\omega^*)$$

$$\oint \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'$$

$$= \mathcal{P} \int \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'$$

$$+ \int_{C_2} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{C_3} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = 0$$

vernachl. ($\epsilon(\omega)$ f\u00e4lle schnell genug ab)



$$\mathcal{P} \int \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' = \tilde{\epsilon}; [\epsilon(\omega) - 1]$$

$$\overline{[\epsilon(\omega) - 1]} = \frac{-i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'$$

$$\begin{aligned} \text{Re } \epsilon(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } \epsilon(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' && \text{Kramers-Kronig} \\ \text{Im } \epsilon(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re } \epsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' && \text{Relationen} \end{aligned}$$

+ Tests die Konsistenz von $\epsilon(\omega)$

+ Messung des Absorptionsverhaltens $\propto \text{Im } \epsilon(\omega)$ (einfacher)

→ Rekonstruktion von $\text{Re } \epsilon(\omega)$

$$\epsilon^*(\omega) = \epsilon(-\omega^*) \quad \begin{aligned} \text{für } \omega \in \mathbb{R} \quad \text{Re } \epsilon(-\omega) &= + \text{Re } \epsilon(\omega) && \text{gerade Fkt} \\ \text{Im } \epsilon(-\omega) &= - \text{Im } \epsilon(\omega) \end{aligned}$$

$$\int f(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} f(\omega) d\omega + \int_0^{\infty} f(-\omega) d\omega$$

$$\text{Re } \epsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \text{Im } \epsilon(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad \text{Dispersionsgesetze}$$

$$\text{Im } \epsilon(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Re } \epsilon(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

$$\omega^2 = \frac{c^2 \epsilon^2}{h^2(\omega)}$$

heißt Näherung $\underline{\epsilon} = \epsilon_r(\omega) + i \epsilon_i(\omega) \approx \frac{\epsilon_0}{c|\mathbf{k}|} \cdot \omega(\omega)$

\uparrow \uparrow
 $c|\mathbf{k}| = \omega$ $\in \mathbb{C}$