Wdh + Galilei-Trafo: Raum & Zeit mischen nicht
+ Michelson/Morley: Es gibt keinen Äther
+ Einstein: Die Vakuum-LGS ist in allen IS konstant
+ lineare Trafo
+ Ursprung von K' bewegt sich mit v in K $\quad x'=0 \Leftrightarrow x=v\cdot t$
+ Wellengl. invariant

$\Rightarrow$ Lorentz-Trafo für $\underline{v}=v\cdot \underline{e}_x$ $\qquad \beta=\frac{v}{c} \qquad -1\le\beta\le+1$

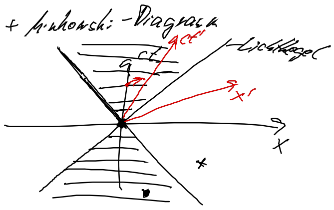
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

"longitudinale" Komponente mischt mit d. Zeit

+ rel. Längenkontraktion $\quad l_{\parallel}' = \frac{l_{\parallel}}{\gamma}$
+ " Zeitdilatation $\quad \Delta t' = \gamma\cdot\Delta t$

für kleine $v \ll c$ fällt LT auf GT zurück

+ Minkowski-Diagramm



5.7.4 Vierervektoren

Notation: Einsteinsche Σ-Konvention: über Indizes welche doppelt vorkommen (oben und unten) wird aut. summiert.

Kontravariante $\quad x^{\text{kontra}} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad$ Kovariante $\quad x_{\text{kov}} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$

Konvention griech. Buchst. = Komp. eines 4er Vektors $\quad \mu \in \{0,1,2,3\}$

$$\begin{aligned} x^0 &= ct = x_0 \\ x^1 &= x = -x_1 \\ x^2 &= y = -x_2 \\ x^3 &= z = -x_3 \end{aligned}$$

ν-Komp. eines Kontravarianten

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu}\cdot x^\nu$$

μ-Komp. eines kov. 4er Vektors

$$x^\nu = \eta^{\nu\mu} x_\mu$$

beachte Σ-Konvention

"metrischer Tensor" auch $(g_{\mu\nu})$

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\eta^{\nu\mu})$$

$\exists$ versch. Konventionen

LT: $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & \\ 0 & & 1_{2\times 2} \end{pmatrix}$$

finde Skalarprodukt durch Analogie zu Drehungen

$$\tilde{x}\cdot\tilde{y} = \eta_{\mu\nu}\, x^\nu y^\mu = x_\mu y^\mu \overset{!}{=} \tilde{x}'\cdot\tilde{y}'$$

$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ LT für kontrav. 4er V.

$$x_\mu x^\mu = (ct)^2 - (x^2+y^2+z^2)$$

$$x'_\sigma = \left(\eta_{\sigma\mu}\Lambda^\mu{}_\nu \eta^{\nu\kappa}\right) x_\kappa$$

$$= \Lambda_\sigma{}^\kappa x_\kappa \qquad \text{effektiv: } (\beta \to -\beta)$$

$x_\mu x^\mu < 0$ ist möglich

$$\hat{=} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & \\ 0 & & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma\beta & 0 \\ +\gamma\beta & \gamma & \\ 0 & & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}'\cdot\tilde{y}' = \eta_{\mu\nu}\, x'^\mu y'^\nu$$

$$= \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\kappa\, x^\sigma y^\kappa$$

$$= \Lambda^\mu{}_\sigma\, \eta_{\mu\nu}\, \Lambda^\nu{}_\kappa\, x^\sigma y^\kappa = \eta_{\sigma\kappa}\, x^\sigma y^\kappa = \tilde{x}\cdot\tilde{y}$$

$$\boxed{\Lambda\,\eta\,\Lambda = \eta}$$

z.B.: $\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Skalar-Prod. von 4er Vektoren sind invariant unter LT

$$x_\mu x^\mu = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

- 4er Geschwindigkeit

Eigenzeit $d\tau = \sqrt{\frac{dx_\mu dx^\mu}{c^2}} = \sqrt{\frac{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}{c^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)}$

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v\cdot v}{c^2}} = dt\sqrt{1-\beta^2}$$

im mitbewegten System — Laborsystem

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma\cdot c \\ \gamma\cdot v_x \\ \gamma\cdot v_y \\ \gamma\cdot v_z \end{pmatrix} \qquad \text{LT: } v'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \cdot v^\nu \qquad \beta^2 = \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}$$

- $v_\mu v^\mu = \gamma^2 \cdot c^2 - \gamma^2 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = c^2\gamma^2 [1-\beta^2] = c^2$

Lorentz-Skalar "LGS ist überall konstant"

Interpretation: $E = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 = m_{eff}\cdot c^2$ $\qquad E_0 = m_0 \cdot c^2$

- 4er Impuls

$$\underbrace{p^\mu = m_0}_{\text{Ruhemasse}} \cdot v^\mu = \begin{pmatrix} \gamma \cdot m_0 \cdot c \\ \gamma\, m_0 \cdot v_x \\ \gamma\, m_0\, v_y \\ \underbrace{\gamma\, m_0}_{m_{eff}} \cdot v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \gamma^2 m_0^2 \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{E_0^2}{c^2}$$

$$\boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + c^2\gamma^2 m_0^2 \cdot (v\cdot v)}$$

rel. Energie-Impuls-Beziehung

$$p_i = m_{eff}\cdot v_i$$

γ divergiert für $v \to c$

$$T = E - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[\sqrt{1+\beta^2 \underbrace{\gamma^2}_{\frac{1}{1-\beta^2}}} - 1\right] \approx \frac{1}{2} m_0 c^2 \beta^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \mathcal{O}(\beta^4)$$

5.7.5. Kov. Notation der ED

Idee: Drücke alles durch 4er Vektoren aus

kovariante Ableitung

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ +\partial_x \\ +\partial_y \\ +\partial_z \end{pmatrix} \qquad \text{kontrav.} \quad \partial^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ -\partial_x \\ -\partial_y \\ -\partial_z \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right) = -\Box$$

4er Stromdichte $j^\mu = \begin{pmatrix} c\cdot\rho \\ j^x \\ j^y \\ j^z \end{pmatrix}$ $\qquad j_\mu j^\mu = c^2\rho^2 - \vec{j}\cdot\vec{j}$ ist invariant

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c}\partial_t(c\cdot\rho) + \partial_x j_x + \partial_y j_y + \partial_z j_z = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0$$

„Kont.-gl. gilt in jedem IS"

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = \partial^\mu j_\mu = 0}$$

- 4er Potential

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} \Phi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \qquad \partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla\cdot A \overset{\text{Lorenz-Eichung}}{=} 0$$

für $\partial_\mu A^\mu = 0$ $\qquad \Box\Phi = -4\pi\rho$, $\quad \Box \underline{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \qquad \boxed{(\partial_\nu \partial^\nu) A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu}$$

- Feldstärke-Tensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \qquad \text{antisymmetrisch}$$

z.B.: $F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\partial_x A_y + \partial_y A_x = -B_z$

$F^{03} = \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0 = \frac{1}{c}\partial_t A_z + \partial_z \Phi = -E_z$

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\sigma \partial^\sigma \Lambda^\nu{}_\kappa A^\kappa - \Lambda^\nu{}_\sigma \partial^\sigma \Lambda^\mu{}_\kappa A^\kappa$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta \quad \left.\begin{matrix} \nabla\cdot E = 4\pi\rho \\ \nabla\times B - \frac{1}{c}\partial_t E = \frac{4\pi}{c} j \end{matrix}\right\} \quad 4\text{ gl.}$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0 \quad \left.\begin{matrix} \nabla\cdot B = 0 \\ \nabla\times E + \frac{1}{c}\partial_t B = 0 \end{matrix}\right\} \quad 4\text{ gl. unabhängige}$$

Vorteile: + symmetrisch & leichter zu merken
+ Lorentz-Invarianz
+ prakt. Nutzen: in manchen IS ist die Lösung einfach

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \Lambda$$

$$F^{\mu\nu} \to F^{\mu\nu} + \underbrace{\left(\partial^\mu \partial^\nu \Lambda - \partial^\nu \partial^\mu \Lambda\right)}_{0}$$

Energie-Impuls-Tensor

Energiedichte

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & & & \\ S_y/c & & -T_{3\times 3} & \\ S_z/c & & & \end{pmatrix}$$

Poynting-Vektor

Maxwell'scher Spannungstensor

4er Kraftdichte

$$f^\nu = \partial_\mu T^{\mu\nu}$$