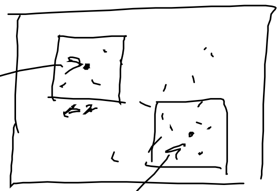
Wdh.

$$\underline{E}_{wahr} = \frac{1}{\Delta V} \int \underline{E}_{mikr}(\underline{r}') \, d^3 r'$$

$E_{wahr}(r_1)$



$$\nabla \left(E_{wahr}(r) + 4\pi \cdot P_{wahr}(r) \right) = 4\pi \, \rho_{wahr}(r) \quad \Big| \; E_{wahr}(r_2)$$

$$= \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} q_j \quad \text{(nur Monopole)}$$

Dipoldichte $\underline{P}_{wahr}(r) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \underline{p}_j$ "Polarisation"

$\underline{D}(r) = E_{wahr}(r) + 4\pi \, P_{wahr}(r)$ dielektr. Verschiebung

Maxwell-Gleichungen in Medien $\nabla \cdot \underline{D} = 4\pi \rho$, $\nabla \times \underline{E} = 0$ } immer noch Elektrostatik

für kleine Felder und isotrope Medien

$$\underline{P} = \chi_e \cdot \underline{E} \quad \longrightarrow \quad \underline{D}(r) = \underbrace{(1 + 4\pi \chi_e)}_{= \varepsilon} \cdot \underline{E}(r)$$

χ_e: elektr. Suszeptibilität

ε: Dielektrizitätskonstante

Energiedichte in linearen und isotropen Medien

$$w = \frac{1}{8\pi} \underline{E} \cdot \underline{D}$$

4. Magnetostatik

- betrachte zeitunabhängige Ströme und konstante Ladungsverteilungen
- Unterschied: es gibt keinen magnet. Monopol

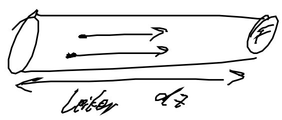
4. 1. Einführung und Definitionen

mittl. Dichte $n = \frac{N}{V}$

mittlere Geschw. v der LT haben alle die Ladung q

Zeit dt

Beispiel



$$dQ = n \cdot q \, dV = n \cdot q \cdot F \cdot dz = n \cdot q \cdot F \cdot v \cdot dt$$

$\hat{=}$ "Ladung durch F in dt"

$$I = \frac{dQ}{dt} = n \cdot q \, F \cdot v$$

n: Teilchendichte

Stromdichte $|\underline{j}| = \frac{I}{F} = \underbrace{n\cdot q}_{\to\rho}\cdot v$ soll in Richtung von v zeigen

allg. $\boxed{\underline{j}(\underline{r}) = \rho(\underline{r})\cdot\underline{v}(\underline{r}) \quad \text{Stromdichte}}$ mittlere Geschw. der LT

daraus $I_F = \iint_F \underline{j}(r)\cdot d\underline{F}$ Stromstärke

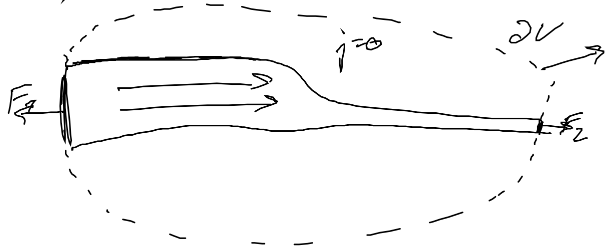
betrachte Satz von Gauss

$$0 = \frac{\partial Q_V}{\partial t} + I_{\partial V} = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\, d^3r + \oint_{\partial V} \underline{j}\cdot d\underline{F} = \int_V \underbrace{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot\underline{j}\right)}_{=0} d^3r$$

→ Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot j = 0$ gilt allgemein

Magnetostatik $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \longrightarrow$ $\boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{j} = 0 \quad \text{in der MS sind die SD divergenzfrei}}$

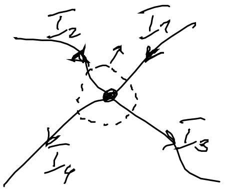
Beispiel: Leiter mit wechselndem Querschnitt



$$0 = \int_V \nabla\cdot j\, d^3r = \oint_{\partial V} j\cdot d\underline{F} = \iint_{F_1} j\cdot d\underline{F} + \iint_{F_2} j\cdot d\underline{F} = I_1 - I_2$$

$\to I_1 = I_2$

Kirchhoff'sche Regel

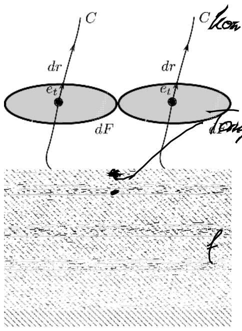


$$0 = \int_V \nabla j\, d^3r = \oint_{\partial V} j\cdot dF = I_3 + I_4 - I_1 - I_2$$

+ empirisch gilt das Ohmsche Gesetz $\underset{\text{Spannung}}{U} = R\cdot\underset{\text{Stromstärke}}{I}$

kein Naturgesetz „elektrischer Widerstand" $[R] = 1\Omega = \frac{V}{A}$

+ Konzept Stromfaden ≙ linienförmiger Strom entlang eines Leiters (dünner Draht)



Kontur $\underline{r}(s)$

Tangenten-Einheitsvektor

$$d\underline{r} = \underline{e}_t \cdot ds$$

$$d\underline{F} = \underline{e}_t \cdot dF$$

$$d^3r = d\underline{F} \cdot d\underline{r} = ds\, dF$$

$$\underline{j} = |j| \cdot \underline{e}_t \quad \to \quad I = \underline{j} \cdot d\underline{f} = j\, df$$

$$\underline{j}\, d^3r = |j| \cdot \underline{e}_t\, df \cdot ds = j \cdot df \cdot d\underline{r} = I \cdot d\underline{r}$$

$$\boxed{\text{"Stromfaden-Substitution"} \quad \underline{j}\, d^3r \longleftrightarrow I\, d\underline{r}}$$

+ Arbeit um eine PL um $d\underline{r}$ zu verschieben

$$dW = \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = q \cdot \underline{E}(r) \cdot d\underline{r}$$

$\to$ Leistung $\frac{dW}{dt} = q \cdot \underline{E}(r) \cdot \underline{v}(r)$ allg. Verteilungen $q \to \rho(r) \cdot d^3r$

$$dP = \rho(r)\, d^3r \left(\underline{E}(r) \cdot \underline{v}(r)\right) = \left(\underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{j}(\underline{r})\right) d^3r$$

gesamte Leistung

$$P = \int_V \left(\underline{E}(r) \cdot \underline{j}(r)\right) d^3r$$

für einen Stromfaden $\to P = I \int_C \underline{E} \cdot d\underline{r} = \boxed{I \cdot U = P}$

für Ohm'sche Leiter gilt: $P = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$ "Verlustleistung"

"lokale Form" des Ohm'schen Gesetzes ist

$$\underline{j}(r) = \sigma_c(r)\, \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{\rho_c(\underline{r})} \cdot \underline{E}(\underline{r})$$

σ_c: elektr. Leitfähigkeit $\quad \rho_c$: spez. elektr. Widerstand

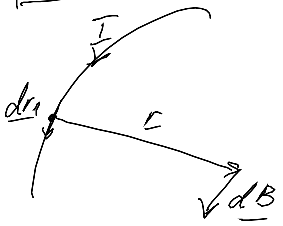
4.2. Das Gesetz von Biot-Savart

- 1819 Oersted beobachtet Ablenkung von Kompaßnadeln durch Ströme
- Lokale Form des Gesetzes von BS

Ein Längenelement $d\underline{r}_1$ eines Stromfadens erzeugt ein Magnetfeld $d\underline{B}$ am Orte $\underline{r}$

$$\boxed{d\underline{B} = k\cdot I \, \frac{d\underline{r}_1 \times \underline{r}}{|\underline{r}|^3}}$$

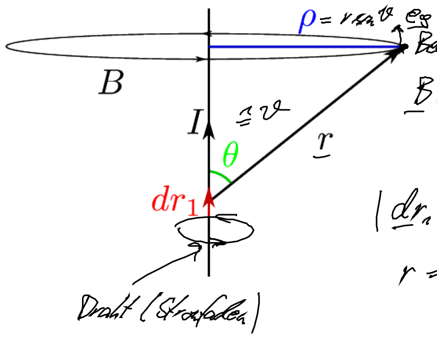
$\underline{r}$ ist der Verbindungsvektor von dr_1 zum Beobachtungspunkt



in Gauss-Einheiten $k = \frac{1}{c}$

in SI - " $k_{SI} = \frac{\mu_0}{4\pi}$

Beispiel: Magnetfeld eines langen (∞) dünnen & geraden Drahtes



$$\underline{B}(r) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\underline{r}_1 \times \underline{r}}{|\underline{r}|^3}$$

$$|d\underline{r}_1 \times \underline{r}| = dr_1 \cdot r \cdot \sin\vartheta$$

$$r = \sqrt{\varrho^2 + r_1^2}$$

$$|B| = \frac{I}{c} \int \frac{r\cdot\sin\vartheta}{r^3} \, dr_1 \, \cancel{\underline{e}_\varphi} = \frac{I\cdot\varrho}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dr_1}{[\varrho^2 + r_1^2]^{3/2}}$$

$$= \left(r_1 = \varrho\cdot\sinh(u)\right) = \frac{I}{c\cdot\varrho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh(u)}{[\sinh^2(u)+1]^{3/2}} \, du$$

$$= \frac{I}{c\cdot\varrho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\cosh^2(u)} = \frac{I}{c\cdot\varrho} \left[\tanh(u)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2I}{c\cdot\varrho}$$

$$\longrightarrow \underline{B} = \frac{2I}{c\cdot\varrho} \cdot \underline{e}_\varphi \qquad \text{"Urform von BS"}$$

4.3. Kräfte zwischen Leitern

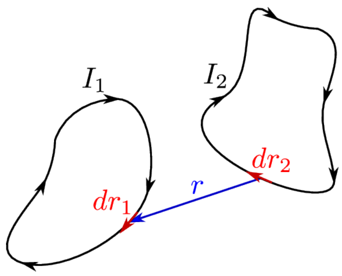
1822 Ampère

Auf einen stromdurchflossenen Leiter der Länge $d\underline{r}_2$ und Stromst. I_2 wirkt im ext. MF $\underline{B}$ die Kraft

$$\boxed{d\underline{F} = \frac{I_2}{c}\, d\underline{r}_2 \times \underline{B}}$$

1. Ampère'sches Gesetz in lokaler Form

$\Rightarrow$ Kraft zwischen zwei Leiterschleifen (geschlossen)



$$F_{12} = \frac{I_2}{c} \oint_{C_2} d\underline{r}_2 \times \left(\frac{I_1}{c} \oint_{C_1} \frac{d\underline{r}_1 \times \overbrace{(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)}^{r}}{|r_1 - r_2|^3} \right)$$

$$= \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\underline{r}_2 \times d\underline{r}_1 \times \underline{r}}{|\underline{r}|^3}$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}\,(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}\,(\underline{a} \cdot \underline{b})$$

$$dr_2 \times (dr_1 \times r) = dr_1 (dr_2 \cdot r) - r\,(dr_1 \cdot dr_2)$$

$$\oint_{C_2} \frac{\underline{r}}{r^3}\, d\underline{r}_2 = -\oint_{C_2} \left(\nabla \frac{1}{r}\right) d\underline{r}_2 \overset{\text{Satz v. Stokes}}{=} -\iint_{A(C_2)} \nabla \times \left(\nabla \frac{1}{r}\right) d\underline{A} = 0$$

$$\boxed{F_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\underline{r}}{|r|^3}\,(d\underline{r}_1 \cdot d\underline{r}_2)}$$

Kraft zwischen 2 Leiterschleifen

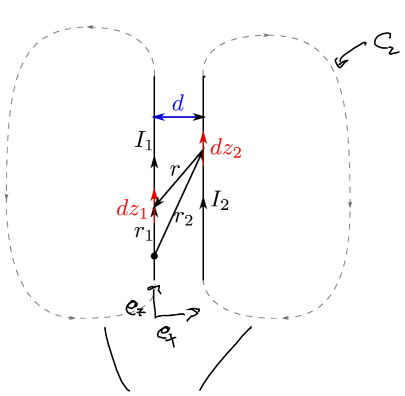
allg. Kraft $\underline{F} = \frac{1}{c} \int \underline{j}(r') \times \underline{B}(r')\, d^3r'$ $\qquad \underline{j} = q \cdot \underline{v}(r)\, \delta(r - r_0)$

$\hat{=}$ PL mit Geschw. v bei r_0

$$= \frac{q}{c} \cdot v(r_0) \times B(r_0) \quad \hat{=} \text{ MF-Anteil der Lorentzkraft}$$

Drehmoment $\underline{N} = \int \underline{r} \times d\underline{F} = \frac{1}{c} \int \underline{r} \times (\underline{j} \times \underline{B})\, d^3r$

Beispiel: Kraft zwischen 2 Drähten



tragen nicht zur Gesamtkraft bei

$$dF_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|^3}$$

$$= -\frac{I_1 I_2}{c^2} dz_1 \int dz_2 \frac{-d \cdot \underline{e_x} - (z_2 - z_1) \cdot \underline{e_z}}{\left[d^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{2 I_1 I_2}{c^2 d} \cdot dz_1 \cdot \underline{e_z}$$

$$f_{12} = \frac{F_{12}}{dz_1} = \frac{2 I_1 I_2}{c^2 \cdot d} \, \underline{e_z}$$