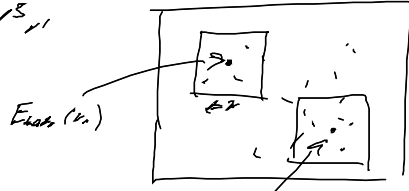


Wdh

$$\underline{E}_{\text{au\ss}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \underline{E}_{\text{au\ss}}(\underline{r}') d^3r'$$



$$\nabla \cdot (\underline{E}_{\text{au\ss}}(\underline{r}) + 4\pi\epsilon_0 \cdot \underline{P}_{\text{au\ss}}(\underline{r})) = 4\pi\epsilon_0 \rho_{\text{au\ss}}(\underline{r}) \quad | \quad \underline{E}_{\text{au\ss}}(\underline{r}_2)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{jesv}} q_i \quad (\text{nur Monopole})$$

Dipoldichte $\underline{P}_{\text{au\ss}}(\underline{r}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\text{jesv}} \underline{p}_i$ "Polarisation"

$$\underline{D}(\underline{r}) = \underline{E}_{\text{au\ss}}(\underline{r}) + 4\pi\epsilon_0 \underline{P}_{\text{au\ss}}(\underline{r}) \quad \text{dielekt. Verschiebung}$$

Maxwell-Gleichungen in Medien $\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{D} = 4\pi \rho \\ \nabla \times \underline{E} = 0 \end{array} \right\} \text{immer noch Elektrostatik}$

für kleine Felder und isotrope Medien

$$\underline{P} = \chi_e \cdot \underline{E} \quad \rightarrow \quad \underline{D}(\underline{r}) = \underbrace{(1 + 4\pi\chi_e)}_{= \epsilon} \cdot \underline{E}(\underline{r})$$

elektr. Suszeptibilität = ϵ Dielektrizitätskonstante

Energiedichte in linearen und isotropen Medien

$$w = \frac{1}{8\pi} \underline{E} \cdot \underline{D}$$

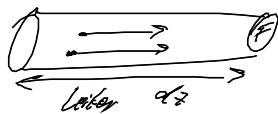
4. Magnetostatik

- betrachte zeitunabhängige Ströme und konstante Ladungsverteilungen
- Unterschied: es gibt keinen magnet. Monopol

4.1. Einführung und Definitionen

mittl. Dichte $n = \frac{N}{V}$

Beispiel



mittlere Gesch. v der LT haben alle die Ladung q Zeit dt

$$dQ = n \cdot q \cdot dV = n \cdot q \cdot F \cdot dz = n \cdot q \cdot F \cdot v \cdot dt$$

$\hat{=}$ "Ladung durch F in dt "

$$\underline{I} = \frac{dQ}{dt} = \underbrace{n \cdot q}_{\text{Teilchenabst.}} \cdot F \cdot v$$

Stromdichte $|\underline{j}| = \frac{I}{F} = \underline{1.9 \cdot 10^8}$ soll in Richtung von V zeigen

allg. $\underline{j}(\underline{r}) = \rho(\underline{r}) \cdot \underline{v}(\underline{r})$ mittlere Gesch., die LT
 Stromdichte

daraus $I_F = \iint_F \underline{j}(\underline{r}) \cdot d\underline{F}$ Stromstärke

betrachte Satz von Gauss

$$0 = \frac{\partial Q_V}{\partial t} + \int_V \underline{j} \cdot d\underline{F} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3r + \oint_{\partial V} \underline{j} \cdot d\underline{F} = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{j} \right) d^3r = 0$$

\rightarrow Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{j} = 0$ gilt allgemein

Magnetostatik $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \underline{v} \cdot \underline{j} = 0$
 in der MS sind die SD divergenzfrei

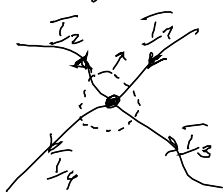
Beispiel: Leiter mit veränderlichem Querschnitt



$$0 = \int_V \underline{v} \cdot \underline{j} d^3r = \oint_{\partial V} \underline{j} \cdot d\underline{F} = \int_{F_1} \underline{j} \cdot d\underline{F} + \int_{F_2} \underline{j} \cdot d\underline{F} = I_1 - I_2$$

$\rightarrow I_1 = I_2$

Kirchhoffsche Regel



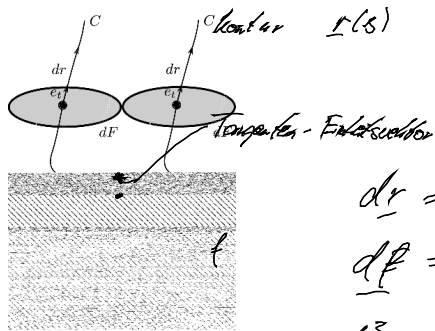
$$0 = \int_V \underline{v} \cdot \underline{j} d^3r = \oint_{\partial V} \underline{j} \cdot d\underline{F} = I_3 + I_4 - I_1 - I_2$$

+ empirisch gilt das Ohmsche Gesetz
 kein Materialgesetz

Spannung $U = R \cdot I$
 Stromstärke

"elektrischer Widerstand" $[R] = \frac{V}{I} = \frac{V}{A}$

+ Konzept Stromfaden $\hat{=}$ uniaxialer Strom entlang einer Leiter (dünner Draht)



$$dr = \underline{c}_t \cdot ds$$

$$dF = \underline{c}_t \cdot dF$$

$$d^3 r = \underline{dF} \cdot \underline{dr} = ds \, dF$$

$$\underline{j} = |j| \cdot \underline{e}_t \rightarrow \underline{I} = \underline{j} \cdot d\underline{t} = j \, dF$$

$$j \, d^3 r = |j| \cdot \underline{c}_t \, dF \cdot ds = j \, dF \cdot \underline{dr} = \underline{I} \cdot \underline{dr}$$

$$\boxed{\text{"Straufaden-Substitution" } j \, d^3 r \longleftrightarrow \underline{I} \, \underline{dr}}$$

+ Arbeit an einer Pl an \underline{dr} zu verrichten

$$dW = \underline{F}(r) \cdot \underline{dr} = q \cdot \underline{E}(r) \cdot \underline{dr}$$

$$\rightarrow \text{Leistung } \frac{dW}{dt} = q \cdot \underline{E}(r) \cdot \underline{v}(r) \quad \text{allg. Verteilungen } q \rightarrow \rho(r) \cdot d^3 r$$

$$dP = \rho(r) \, d^3 r \cdot (\underline{E}(r) \cdot \underline{v}(r)) = (\underline{E}(r) \cdot \underline{j}(r)) \, d^3 r$$

gesamte Leistung

$$P = \int (\underline{E}(r) \cdot \underline{j}(r)) \, d^3 r$$

$$\text{für einen Straufaden} \rightarrow P = \underline{I} \int_C \underline{E} \cdot \underline{dr} = \boxed{\underline{I} \cdot U = P}$$

$$\text{für Ohm'sche Leiter gilt } P = R \cdot \underline{I}^2 = \frac{U^2}{R} \quad \text{"Verlustleistung"}$$

"lokale Form des Ohm'schen Gesetzes ist

$$\underline{j}(r) = \underbrace{\sigma_c(r)}_q \underline{E}(r) = \frac{1}{\underbrace{\rho_c(r)}_{\text{spez. elektr. Widerstand}}} \cdot \underline{E}(r)$$

elect. Leitfähigkeit spez. elektr. Widerstand

4.2. Das Gesetz von Biot-Savart

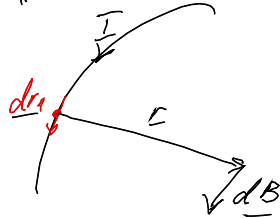
- 1819 Oersted beobachtet Ableitung von Kompassnadel durch Strom

• Lokale Form des Gesetzes von BS

Ein Längenelement dr_1 eines Stromfadens erzeugt ein Magnetfeld $d\underline{B}$ an Orte r :

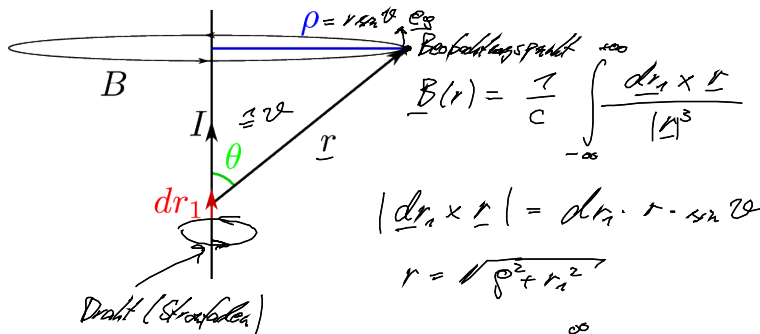
$$\underline{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\underline{r}_1 \times \underline{r}}{r^3}$$

\underline{r} ist der Verbindungsvektor von $d\underline{r}_1$ zum Beobachtungspunkt



in Gauss-Einheiten $k = \frac{1}{c}$
in SI - " $k_{SI} = \frac{\mu_0}{4\pi}$

Beispiel: Magnetfeld eines langen (∞) dünnen zylindrischen Drahtes



$$|d\underline{r}_1 \times \underline{r}| = dr_1 \cdot r \cdot \sin \vartheta$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + r_1^2}$$

Draht (Stromfaden)

$$|B| = \frac{I}{c} \int \frac{r \cdot \sin \vartheta}{r^3} dr_1 \underline{e}_\varphi = \frac{I \cdot \varphi}{c} \int \frac{dr_1}{[\rho^2 + r_1^2]^{3/2}}$$

$$= \left(r_1 = \rho \cdot \tan(\alpha) \right) = \frac{I}{c \cdot \rho} \int \frac{\cos \alpha(\alpha)}{[\sin^2(\alpha) + 1]^{3/2}} d\alpha$$

$$= \frac{I}{c \cdot \rho} \int \frac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)} = \frac{I}{c \cdot \rho} [\tan \alpha(\alpha)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2I}{c \cdot \rho}$$

$$\rightarrow \underline{B} = \frac{2I}{c \cdot \rho} \cdot \underline{e}_\varphi \quad \text{"Form von BS"}$$

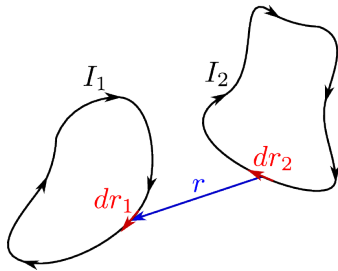
4.3. Kräfte zwischen Leitern

1822 Ampere

Auf einem stromdurchflossenen Leiter der Länge dr_2 und Strom I_2 wirkt in ext. dF B die Kraft

$$d\underline{F} = \frac{I_2}{c} d\underline{r}_2 \times \underline{B} \quad \begin{array}{l} \text{1. Ampere'sches Gesetz} \\ \text{in lokaler Form} \end{array}$$

=> Kraft zwischen zwei Leiterschleifen (geschlossen)



$$\begin{aligned} F_{21} &= \frac{I_2}{c} \oint_{C_2} d\underline{r}_2 \times \left(\frac{I_1}{c} \oint_{C_1} \frac{d\underline{r}_1 \times (\underline{r}_1 - \underline{r}_2)}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} \right) \\ &= \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\underline{r}_2 \times d\underline{r}_1 \times \underline{r}}{|\underline{r}|^3} \end{aligned}$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$$

$$d\underline{r}_2 \times (d\underline{r}_1 \times \underline{r}) = d\underline{r}_1(d\underline{r}_2 \cdot \underline{r}) - \underline{r}(d\underline{r}_1 \cdot d\underline{r}_2)$$

$$\oint_{C_2} \frac{\underline{r}}{r^3} d\underline{r}_2 = - \oint_{C_2} \left(\nabla \cdot \frac{1}{r} \right) d\underline{r}_2 \stackrel{\text{Satz v. Stokes}}{=} - \iint_{A(C_2)} \nabla \times \left(\nabla \frac{1}{r} \right) d\underline{A} = 0$$

$$F_{21} = - \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\underline{r}}{r^3} (d\underline{r}_1 \cdot d\underline{r}_2)$$

Kraft zwischen 2 Leiterschleifen

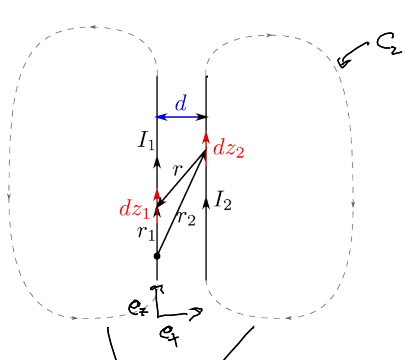
$$\text{allg. Kraft } \underline{F} = \frac{1}{c} \int \underline{j}(\underline{r}) \times \underline{B}(\underline{r}) d^3\underline{r} \quad \underline{j} = q \cdot \underline{v}(\underline{r}) \delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$$

= PL mit Geschw. v bei \underline{r}_0

$$= \frac{q}{c} \cdot \underline{v}(\underline{r}_0) \times \underline{B}(\underline{r}_0) \quad \hat{=} \text{MF-Anteil der Lorentzkraft}$$

$$\text{Drehmoment } \underline{N} = \int \underline{r} \times d\underline{F} = \frac{1}{c} \int \underline{r} \times (\underline{j} \times \underline{B}) d^3\underline{r}$$

Beispiel: Kraft zwischen 2 Drähten



$$dF_{12} = \frac{\bar{I}_1 \bar{I}_2}{c^2} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|^3}$$

$$= -\frac{\bar{I}_1 \bar{I}_2}{c^2} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \frac{-d \underline{e}_x - (z_2 - z_1) \underline{e}_z}{(d^2 + (z_2 - z_1)^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{2 \bar{I}_1 \bar{I}_2}{c^2 d} \cdot dz_1 \underline{e}_z$$

tragen nicht zur Gesamtkraft bei

$$f_{12} = \frac{F_{12}}{dz_1} = \frac{2 \bar{I}_1 \bar{I}_2}{c^2 \cdot d} \underline{e}_z$$

