Wdh 4er Vektoren $(x^\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $(x_\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$

kontravarianten

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \qquad (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Summenkonvention spez. Konvention

$$x_\mu y^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu$$

$v = v \cdot e_x$ ist Geschw. von K' in K

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \qquad (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in K' in K

$$\boxed{\eta = \Lambda \eta \Lambda} \rightarrow \text{Skalarprod. ist invariant}$$

- 4er Ableitung

$$(\partial_\mu) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

- 4er Stromdichte

$$(j^\mu) = \begin{pmatrix} c \cdot \rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0$$

- 4er Potential $A^\mu = \begin{pmatrix} \Phi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \qquad (\partial^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ -\partial_x \\ -\partial_y \\ -\partial_z \end{pmatrix} = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu$$

- Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ antisymm. $\partial_\mu x^\mu = 4$

inv. gegenüber EichTrafos $A^\nu \rightarrow A^\nu + \partial^\nu \Lambda$ ← skalare Funktion

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F^{\mu\nu}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \qquad \partial^\nu F^{\mu\lambda} + \partial^\lambda F^{\nu\mu} + \partial^\mu F^{\lambda\nu} = 0$$

4 inhomog. Maxwell-Gl. 4 homogene Maxwell-Gl.

$\nu \neq \mu \neq \lambda \neq \nu$

Lorentz-Kraft $\underline{F}_L = q \cdot \underline{E} + \frac{q}{c} \cdot \underline{v} \times \underline{B}$ $\qquad d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2} = \frac{dt}{\gamma}$

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = m_0 \cdot \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} \cdot u_\nu}$$

$$(u^\mu) = \begin{pmatrix} \gamma \cdot c \\ \gamma \cdot v_x \\ \gamma \cdot v_y \\ \gamma \cdot v_z \end{pmatrix}$$

$i \in \{1,2,3\}$

$\underline{\mu = 0}$: $\underbrace{m_0 \gamma \frac{d}{dt}}_{\frac{d}{d\tau}} (\gamma \cdot c) = \frac{q}{c} F^{0i} u_i$

$$= \frac{q}{c} (-\underline{E}) \cdot (-\gamma \cdot \underline{v})$$

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 c^2) = q\, \underline{E} \cdot \underline{v}$$

Änd. der Gesamtenergie $\qquad$ mech. Leistung

$\underline{\mu \in \{1,2,3\}}$: $\frac{d}{dt}(\gamma m_0 \cdot \underline{v}) = \underbrace{q \cdot \underline{E}}_{F^{i0}} + \underbrace{\frac{q}{c} \underline{v} \times \underline{B}}_{F^{ij}}$

$m_{\text{eff}} = \gamma \cdot m_0$

5.7.6. Transf. der Felder

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \qquad \partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu$$

$$F'^{\mu\nu} = \partial'^\mu A'^\nu - \partial'^\nu A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\kappa F^{\sigma\kappa} = \Lambda^\mu{}_\sigma F^{\sigma\kappa} \underbrace{\Lambda^\nu{}_\kappa}_{\Lambda_\kappa{}^\nu}$$

$$(F'^{\mu\nu}) = \Lambda F \Lambda$$

für $\underline{v} = v \cdot \underline{e}_x$ $\qquad E_x' = E_x \qquad E_y' = \gamma \cdot E_y - \beta\gamma B_z \qquad E_z' = \gamma \cdot E_z + \beta\gamma \cdot B_y$

$\qquad B_x' = B_x \qquad B_y' = \gamma \cdot B_y + \beta\gamma \cdot E_z \qquad B_z' = \gamma \cdot B_z - \beta\gamma \cdot E_y$

5.7.7. ~~Beispiel: Gleichförmig bewegte Ladungsverteilung~~

im RS der LV $\quad (j'^\mu) = \begin{pmatrix} c \cdot \rho_0(x', y', z') \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

falls $\rho_0(\underline{r}')$ räumlich begrenzt $\rightsquigarrow$ Elektrostatik

$$\underline{\Phi}'(r') = \int \frac{\rho_0(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')}{|\underline{r}' - \underline{\bar{r}}'|} d^3\bar{r}' \rightsquigarrow E'(r') = -\nabla' \underline{\Phi}'$$

$$\underline{A}'(r') = \underline{0} \longrightarrow B'(r') = 0$$

$\rightsquigarrow \frac{1}{c} \partial_{t'} \underline{\Phi}' + \nabla' \cdot A' = 0$ $\qquad$ Lorenz-Eichung

$\partial'_\mu A'^\mu = 0$ $\qquad \rightsquigarrow$ gilt in allen IS transformiere die 4er Stromdichte

$$\begin{pmatrix} c\varrho \\ j_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma\beta \\ +\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\varrho_0(x',y',z') \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$\varrho(\underline{r},t) = \gamma \cdot \varrho_0(x',y',z') = \gamma \cdot \varrho_0(\underline{\gamma(x-v\cdot t)}, y, z)$$

$$j_x(\underline{r},t) = v \cdot \gamma \cdot \varrho_0(\gamma(x-v\cdot t), y, z) = v \cdot \varrho(\underline{r},t)$$

- Ladungsverteilung erscheint gestaucht in Richtung der Relativ-Geschwindigkeit

Gesamtladung ist invariant

$$\int \varrho(\underline{r},t)\, d^3r = \gamma \int \varrho_0(\gamma(x-vt), y, z)\, d^3r = Q = Q'$$

in LS muss gelten (wegen Lorenz-Eichung)

$$\Box \Phi = -4\pi \varrho(r,t)$$

$$\Box \underline{A} = -\frac{4\pi}{c} \underline{j}(r,t)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ A_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma \\ +\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi' \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A_y' = A_y = 0, \quad A_z' = A_z = 0$$

$$\Phi(\underline{r},t) = \gamma \int \frac{\varrho_0(\bar{r}')}{\sqrt{(\underbrace{\gamma x - \beta\gamma ct}_{x'} - \bar{x}')^2 + (y-\bar{y}')^2 + (z-\bar{z}')^2}}\, d^3\bar{r}' \qquad A_x = \beta \cdot \Phi(\underline{r},t)$$

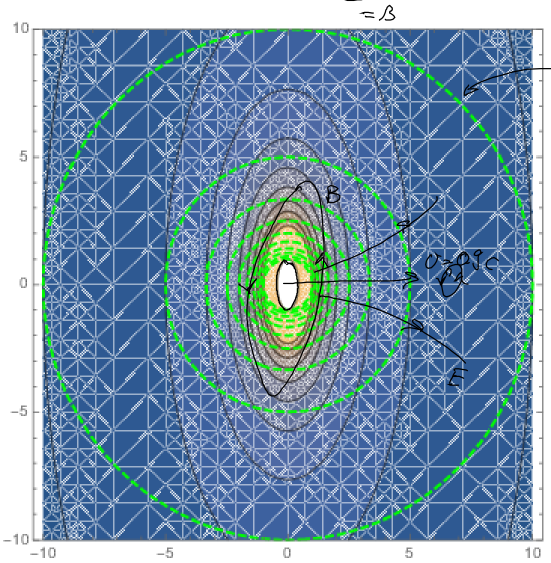
$$\Box \Phi = \gamma \int \left\{ \partial_{x'}^2 + \partial_{y'}^2 + \partial_{z'}^2 - \cancel{\frac{1}{c^2}\partial_{t'}^2} \right\} \frac{\varrho_0(\bar{r}')}{\sqrt{\dots}}\, d^3\bar{r}'$$

$$= -4\pi\gamma\varrho_0(x',y',z') = -4\pi\gamma\varrho_0(\gamma x - \beta\gamma ct, y, z) = -4\pi\varrho(r,t)$$

$$\Delta \frac{1}{|r'-\bar{r}'|} = -4\pi\delta(r'-\bar{r}')$$

$$\Box A_x = -\frac{4\pi}{c} \cdot j_x$$

$$\beta \Box \Phi = -4\pi \underbrace{\frac{v}{c}}_{=\beta} \varrho$$



Potential einer radialsym. LV mit homog. Ladungsdichte in einer Kugel

$$\Phi'(r' > R) = \frac{Q}{r'}$$

5.7.8. Doppler-Effekt

Welcher 4er Vektor beschreibt eine ebene Welle

$$(k^\mu) = \begin{pmatrix} \omega/c \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \qquad \omega = |\underline{k}|c \qquad \begin{pmatrix} \omega'/c \\ k_x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega/c \\ k_x \end{pmatrix}$$

$x_\mu k^\mu = ct\,\frac{\omega}{c} - \underline{k}\cdot\underline{r}$ $\qquad \underline{A} = \mathrm{Re}\left\{A_0\, e^{-i x_\mu k^\mu}\right\}$ Vektorpot. einer ebenen Welle

+ betrachte Signal, welches von einer bewegten Quelle (K') ausgesandt wird
+ wird von ruhenden Beobachter gemessen (K)
+ K' bewege sich mit $\underline{v} = v\cdot e_x$ in K

$$\omega' = \gamma\cdot\omega - \beta\cdot\gamma\, c\cdot k_x = \gamma\,\omega - \gamma\,\underline{v}\cdot\underline{k} = \gamma\cdot\omega - \gamma\, v\,\underbrace{k}_{\frac{\omega}{c}}\cdot\cos\vartheta$$
$$= \gamma\,\omega\left[1 - \beta\cos\vartheta\right]$$

$$\boxed{\omega = \frac{\omega'\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cdot\cos\vartheta} \quad \text{Kreisfreq. im Laborsystem} \qquad \vartheta = \sphericalangle(\underline{k},\underline{v}) \quad \text{rel. Doppler-Effekt}}$$

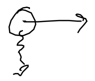
a.) longitudinaler Doppler-Effekt $(\beta > 0)$

- $\cos\vartheta = +1$ $\quad \omega > \omega'$ Blauverschiebung $\omega = \frac{\omega'\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}$ Quelle bewegt sich auf Empfänger zu
- $\cos\vartheta = -1$ $\quad \omega < \omega'$ Rotverschiebung $\omega = \frac{\omega'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta}$ Quelle bewegt sich weg

b.) transversaler Doppler-Effekt $(\beta > 0)$

$\cos\vartheta = 0$

$\omega = \omega'\sqrt{1-\beta^2} < \omega'$



- Akustischer Doppler-Effekt hängt von beiden Relativ-v (Sender & Empfänger) ab
  Sender-Medium
  Empfänger-Medium
- relativ. Doppler-Effekt hängt nur von v_{Rel} Sender−Empfänger ab

Nächst. Einschub: Funktionentheorie