

English Summary:

4.4.2 Glauber states = coherent states = classical states

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad \alpha = |\alpha|e^{i\theta} \in \mathbb{C}$$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \text{Poisson distribution of Fock states}$$

$$\langle \alpha | \hat{E} | \alpha \rangle = 2C|\alpha| \cos \theta \quad \langle \alpha | (\Delta \hat{E})^2 | \alpha \rangle = C^2 \quad \text{minimum uncertainty}$$

$$\langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad \langle \alpha | (\Delta \hat{n})^2 | \alpha \rangle = |\alpha|^2 = \bar{n}$$

Glauber state = displaced vacuum state $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle$

displacement operator $\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}$

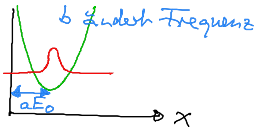
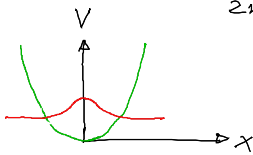
4.4.3 Gequetschte Zustände
(squeezed coherent states)

qm. Unschärfe reduziert für manche Phasen θ im Vergleich zum kohärenten Zustand

Motivation: harmon. Osz. mit externem Feld

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 - eE_0(ax - bx^2) \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}(k + 2ebE_0)x^2 - eaE_0x \end{aligned}$$

Barriere



$b=0$: Lösung ist verschobener Grundzustand
Abschalten von E_0 liefert kohärenten Zustand
(Anf. bed.: verschobener Grundzustand)

$b \neq 0$: zusätz. Barriere \Rightarrow größere Federkonst. (Frequenz)

qm. Formulierung

man benötigt 2-Photonen-Prozesse im Hamiltonian

z.B. $H_i = i\hbar (g(\hat{a}^\dagger)^2 - g^*(\hat{a})^2)$

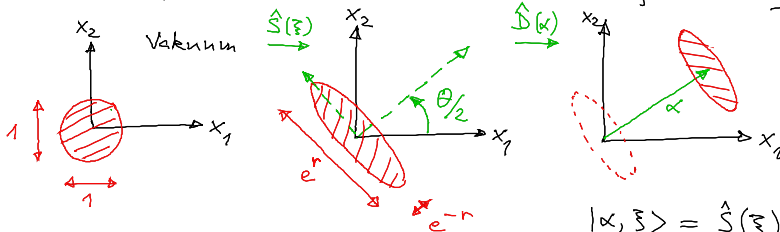
z.B. im nichtlin. Kristall

(nichtlineare Osz., z.B. Van der Pol-Osz.)

Definiere einen Quetsch-Operator $S(\xi)$ (squeeze op.)

$$\hat{S}(\xi) = e^{\frac{1}{2}\xi^* \hat{a}^2 - \frac{1}{2}\xi \hat{a}^{\dagger 2}}$$

mit $\xi = r e^{i\theta}$ Quetsch-Parameter



$$|\alpha, \xi\rangle = \hat{S}(\xi) \hat{D}(\alpha) |0\rangle$$

gequetschter kohärenter Zustand

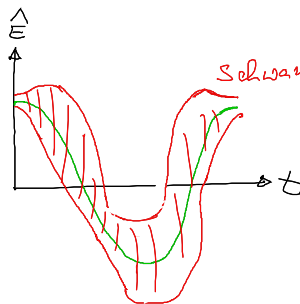
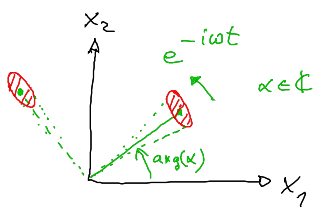
Def.: $y_1 + iy_2 = (x_1 + ix_2) e^{-i\frac{\theta}{2}}$

gedrehte Annahatskomponenten

$$(\Delta y_1)^2 = \langle y_1^2 \rangle - \langle y_1 \rangle^2 = e^{-2r}$$

$$(\Delta y_2)^2 = e^{2r}$$

$$\Delta y_1 \Delta y_2 = 1$$



Schwingungsbreite hängt von Phase ωt ab

Quetschung ist nichtklassischer Effekt
(quantenoptischer)

- Fock-Zustand ist maximal amplitudengequetscht, aber kein kohärent gequetschter Zustand.

4.4.4. Gemischte Zustände

- bisher: Diskussion der Quantenzustände des Lichts in reinen Zuständen
- Realität: es liegt ein Gemisch von Zuständen vor
Beschreibung durch Dichtematrix (statist. Operator)

$$\hat{\rho} = \sum_n P_n |n\rangle \langle n|$$

$\hat{\rho}$ kann bzgl. Fock-Zuständen entwickelt werden

$$\hat{\rho} = \sum_n \sum_m \rho_{nm} |n\rangle \langle m|$$

\hat{g} bzgl. Glauber-Zuständen entwickeln

$$\hat{g} = \iint \frac{d^2\alpha}{\pi} \frac{d^2\beta}{\pi} |\alpha\rangle \underbrace{\langle \alpha | \hat{g} | \beta \rangle}_{R(\alpha, \beta)} \langle \beta | \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

R-Darstellung der Dichtematrix

andere Möglichkeit: P-Darstellung (diagonale kohärente Darstellung)

$$\hat{g} = \int P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha$$

d.h. wir pressen die QM in ein klass. Format

- funktioniert gut z.B. bei thermischem Licht bei Glauber-Zustand
- aber z.B. bei Fock-Zuständen ist P nicht wohldefiniert

Phasenraumfunktionen: P-Darstellung

$$\text{Ziel: } \hat{g} = \int P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha$$

$$\text{Mittelwert von } \hat{F}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \sum_n \sum_m c_{nm} (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m:$$

(\hat{F} ist ein normalgeordneter Op.: \hat{a}^\dagger links, \hat{a} rechts)

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rangle &= \text{tr} [\hat{g} \hat{F}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)] \\ &= \sum_n \sum_m c_{nm} \text{tr} [\hat{g} (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m] \end{aligned}$$

Definiere operatorwertige δ -Fkt.

$$\delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) \delta(\alpha - \hat{a}) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{-\beta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger)} e^{\beta^*(\alpha - \hat{a})} d^2\beta \quad \text{Scully, Quantum Optics}$$

$$\langle \hat{F}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rangle = \int d^2\alpha \sum_n \sum_m c_{nm} \text{tr} [\hat{g} \delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) \delta(\alpha - \hat{a})] (\alpha^*)^n \alpha^m$$

$$= \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) F(\alpha, \alpha^*)$$

$$\text{wobei: } P(\alpha, \alpha^*) = \text{tr} [\hat{g} \delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) \delta(\alpha - \hat{a})]$$

Bestimmung von P aus \hat{g} :

$$1) \langle -\beta | \hat{g} | \beta \rangle$$

$$2) P(\alpha, \alpha^*) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi} \int \langle -\beta | \hat{g} | \beta \rangle e^{|\beta|^2} e^{-\beta\alpha^* + \beta^*\alpha} d^2\beta$$

"Coherent state representation"

Eigenschaften von P :

$$\text{tr} \hat{\rho} = 1 \implies \int P(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha = 1$$

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha$$

Beispiel: • thermisches Licht: $\rho_{nm} = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}} \delta_{nm}$

(therm. Gleichgewichtsverteilung: Bose-Verteilung $\bar{n} = \frac{1}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1}$)

$$\implies P(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi \bar{n}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}}} \quad \left(\text{Gauß-Verteilung bzgl. der kohärenten Zustände} \right)$$

• kohärenter Zustand $|\alpha_0\rangle$ reiner Zustand

$$P(\alpha, \alpha^*) = \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\alpha^* - \alpha_0^*)$$

NB: andere mögliche Darstellungen

① Q-Darstellung (für antinormal geordnete Op. \hat{A})

$$\langle \hat{A}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rangle = \int Q(\alpha, \alpha^*) A(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha$$

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \text{tr} [\hat{\rho} \delta(\alpha - \hat{a}) \delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger)] = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle$$

vgl. andere Reihenfolge in P-Darstellung

② Wigner-Weyl-Darstellung (für symm. Op.)

