

English Summary:

Autocorrelation fun. $G(\tau) \equiv \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$

Spectral power density $S(\omega) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} |\hat{x}(\omega; T)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} G(\tau)$

1.3 Chapman-Kolmogorov eq.

continuous time: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(x, t+\Delta t | z, t)}{\Delta t} = W(x|z, t)$ transition prob. per unit time

1st moment (drift) of $p(x, t+\Delta t | z, t)$: $A_i(z, t)$

2nd moment (diffusion matrix): $B_{ij}(z, t)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(z, t | y, t') &= - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} [A_i(z, t) p(z, t | y, t')] \\ &\quad + \sum_{ij} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} [B_{ij}(z, t) p(z, t | y, t')] \end{aligned} \right\} \textcircled{1}$$

$$+ \int dx [W(z|x, t) p(x, t | y, t') - W(x|z, t) p(z, t | y, t')] \textcircled{2}$$

differential Chapman-Kolmogorov eq.

- ① Fokker-Planck eq. (diffusion + drift, continuous)
- ② Master eq. (jump processes, discontinuous in x)

(b) Diffusionsprozesse (kontinuierlich)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t | \dots) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} [B_{ij}(z, t) p(z, t | \dots)]$$

Diffusionsmatrix B_{ij} ($B_{ij} = B_{ji}$ pos. semi-definit)

z.B. 1-dim., $\frac{1}{2} B_{ij} = D$
(Diff. konst.)

$$\frac{\partial}{\partial t} p = D \frac{\partial^2}{\partial z^2} p \quad (\text{Diffusionsgl.})$$

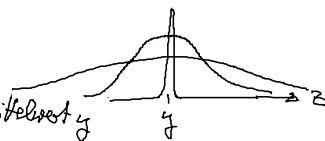
$$\frac{\partial}{\partial t} n + \text{div } j = 0$$

$$(j = -D \nabla n)$$

Lösung für Anfangsverteil. $p(z, t | y, t) = \delta(z-y)$ und kleine Δt :

$$p(z, t + \Delta t | y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2D\Delta t}} \exp \left\{ -\frac{(z-y)^2}{4D\Delta t} \right\}$$

Gaußverteilung mit Varianz $\sigma^2 = 2D\Delta t$ und Mittelwert y



(c) Drift (kontinuierlich)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t | \dots) = - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} [A_i(z, t) p(z, t | \dots)]$$

Lionsille-Gl. der klass. Mechanik (konservativ)

mit Drift-Vektor $A_i(z, t)$ (Kraft oder Feld)

$\hat{=}$ determinist. Bewegung eines Teilchens

$$\dot{x}(t) = A(x(t)) \quad \text{mit } x(t_0) = y$$

$\Rightarrow p(z, t | y, t_0) = \delta(z - x(t))$ ist Lösung der Liouville-Gl.
 zu Anfangsbed. $p(z, t_0 | y, t_0) = \delta(z - y)$

Beweis (1-dim.):

$$\begin{aligned} \text{R.S.} &: -\frac{\partial}{\partial z} [A(z) \delta(z - x(t))] \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} [A(x(t)) \delta(z - x(t))] \\ &= -A(x(t)) \frac{\partial}{\partial z} \delta(z - x(t)) \end{aligned}$$

$$\text{L.S.} : \frac{\partial}{\partial t} \delta(z - x(t)) = -\frac{\partial \delta(z - x(t))}{\partial z} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{A(x(t))} \quad \square$$

Kombination von (b) und (c):

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t | \dots) = -\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} [A_i(z, t) p(z, t | \dots)] + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} [B_{ij}(z, t) p(z, t | \dots)]$$

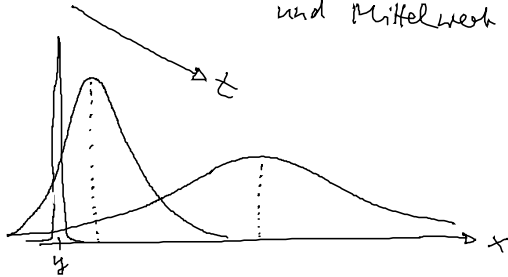
Fokker-Planck-Gl.:

Lösung für kleine Δt und N -dim. Zufallsvar.: $B_{ij}(z) \approx B_{ij}(y)$

$$A_i(z) \approx A_i(y)$$

$$p(z, t + \Delta t | y, t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} (\det B)^{-\frac{1}{2}} \Delta t^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{[z - y - A \Delta t]^T B^{-1} [z - y - A \Delta t]}{\Delta t} \right\}$$

Gaußverteilung mit Kovarianzmatrix $\underline{B} \Delta t$
 und Mittelwert $\underline{y} + \underbrace{\underline{A} \Delta t}_{\text{Drift}}$ \leftarrow Diff.



2. Klassische Statistik im Nichtgleichgewicht

2.1 Mastergleichung

Für Markov-Prozesse gilt die Chapman-Kolmogorov-Gl.

$$p(x, t'' | x', t') = \int dz p(x, t'' | z, t) p(z, t | x', t') \quad (1)$$

$$t'' \geq t \geq t'$$

Für Sprung-Prozesse:

$$W(x | z, t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(x, t + \Delta t | z, t)}{\Delta t} \quad \text{Übergangswahrsch. pro Zeiteinheit}$$

machte plausible Annahme für kleine Δt

$$p(x, t + \Delta t | z, t) = \underbrace{\delta(x-z) \left[1 - \int dx_2 W(x_2 | z, t) \Delta t \right]}_{\substack{\text{Übergangsw.} \\ \text{pro Zeit von } z \\ \text{in irgendeinem Zustand}}} + \underbrace{W(x | z, t) \Delta t}_{\substack{\text{Übergangsw.} \\ \text{pro Zeit} \\ z \rightarrow x}}$$

Wahrscheinl., dass kein Übergang stattfindet im Intervall $[t, t + \Delta t]$

Damit lässt sich aus (1) für differentielle Zustandsänderungen direkt die Mastergl. ableiten, $t'' = t + \Delta t$:

$$p(x, t + \Delta t | x', t') = \int dz \delta(x-z) \left[1 - \int dx_2 W(x_2 | z, t) \Delta t \right] p(z, t | x', t') + \int dz W(x | z, t) \Delta t p(z, t | x', t')$$

$$= \underbrace{\left[1 - \Delta t \int dx_2 W(x_2 | x, t) \right]}_{\substack{\downarrow \\ z}} p(x, t | x', t') + \Delta t \int dz W(x | z, t) p(z, t | x', t')$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x', t') = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(x, t + \Delta t | x', t') - p(x, t | x', t')}{\Delta t}$$

$$= \int dz W(x | z, t) p(z, t | x', t') - \int dz W(z | x, t) p(x, t | x', t')$$

Mastergleichung $x \leftarrow z$ $z \leftarrow x$

Für diskrete Zufallsvar. $N(t)$ mit Realisierung $m \in \mathbb{N}$ (oder $m \in \mathbb{Z}$)

(z.B. Teilchenzahl bei chem. Reaktionen,
Elektronenzahl beim Tunneln oder bei
Rekombinations-Generations-Prozesse in Halbleitern)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(n, t | n', t') = \sum_m [W(n|m, t) p(m, t | n', t') - W(m|n, t) p(n, t | n', t')]$$

Oder kurz: $p_n(t) := p(n, t | n', t')$ mit Anf. bed. $p_n(t')$

$$W_{nm} := W(n|m, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_n(t) = \sum_{\substack{m \\ \neq n}} [W_{nm} p_m(t) - W_{mn} p_n(t)]$$

$n \leftarrow m$ $m \leftarrow n$
gain loss

NB: 1) oBdA $m \neq n$ in der Summe, da sich der Diagonalterm weghebt

2) $W_{nm} \geq 0$

$\sum_n W_{nm} = 1$, da entweder ein Übergang
in anderen Zustand ($\neq m$) oder kein Übergang
 $\Rightarrow W_{mm} = 1 - \sum_{n \neq m} W_{nm}$ (Spaltensumme = 1)

Def.
stochast.
Matrix

3) z.B. Berechnung von $W_{nm} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n | H_1 | m \rangle|^2 \delta(E_n - E_m)$
aus Fermi's golden Rule
mit Störoperator H_1

Beispiel: Zerfallsprozess (radioaktiver Zerfall von $N(t)$ Atomen)

$W_{nn'} = \gamma n' \delta_{n, n'-1}$ γ Zerfallsrate ($n' \rightarrow n'-1$)
(Wahrscheinl. pro Zeit)

$\dot{p}_n = \sum_{n'} [\gamma n' \delta_{n, n'-1} p_{n'} - \gamma n \delta_{n', n-1} p_n]$

$= \gamma [(n+1) p_{n+1} - n p_n]$ Anf. bed. $p_n(0) = \delta_{n, n_0}$
 $n \leftarrow n+1 \quad n-1 \leftarrow n$