

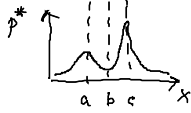
English Summary

Kramers Problem: escape over potential barrier



mean first passage time

$$T(a \rightarrow x \approx b) \approx 2\pi\sqrt{D} \exp\left[\frac{U(b) - U(a)}{D}\right]$$



bimodal probability distribution

2.3 Langevin equation

$$\dot{x} = a(x, t) + b(x, t) \xi(t)$$

Wiener process

$$x = \sqrt{2D} \xi(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [a(x, t)p(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(x, t)^2 p(x, t)] \quad \text{Fokker-Planck eq.}$$

Drift coeff. $A = a$ dif. coeff. $D = \frac{B}{2} = \frac{b^2}{2}$

(ii) Ornstein-Uhlenbeck - Prozess

$$\dot{x} = -kx + \sqrt{2D} \xi(t)$$

lin. drift

$$\frac{\partial}{\partial t} p = \frac{\partial}{\partial x} (kx p) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p$$

FP-Gl.

$$p = p(x, t / x_0, t_0)$$

stationäre Lösung auf $[a, b]$ mit reflektierenden Rändern:

$$p^*(x) = N \exp\left[\frac{1}{D} \int_0^x dx' (-kx')\right] = \sqrt{\frac{k}{2\pi D}} \exp\left[-\frac{k}{2D} x^2\right] \quad (j(x) = 0)$$

$$\langle x(t) \rangle = 0$$

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \frac{D}{k}$$



zeitabh. Lösung: $\langle x(t) \rangle_{x_0, t_0} = x_0 e^{-k(t-t_0)}$

$$\langle \Delta x^2 \rangle_{x_0, t_0} = \frac{D}{k} (1 - e^{-2k(t-t_0)})$$

Autokorr. fkt. (stationär; $t_0 \rightarrow -\infty$)

$$\langle x(t_1) x(t_2) \rangle_{x_0, t_0} = \int \int dx_1 dx_2 x_1 x_2 p(x_1, t_1, x_2, t_2 / x_0, t_0) \quad t_1 \geq t_2 \geq t_0$$

$$= \int dx_2 \left[\int dx_1 x_1 p(x_1, t_1 / x_2, t_2) \right] x_2 p(x_2, t_2 / x_0, t_0)$$

$\langle x_1 \rangle_{x_2, t_2} = x_2 e^{-k(t_1-t_2)}$ $\sqrt{\frac{k}{2\pi D}} \exp\left[-\frac{k}{2D} x_2^2\right]$

$$= e^{-k(t_1-t_2)} \int dx_2 x_2^2 p^*$$

$\langle x^2 \rangle_* = \langle \Delta x^2 \rangle_* + \langle x \rangle_*^2$

$$= \frac{D}{k} e^{-k|t_1-t_2|}$$

exponentielle Korrelation mit Korrelationszeit $\tau_c = \frac{1}{k}$

$$G(\tau) \equiv \langle X(t+\tau) X(t) \rangle = \frac{\mathcal{D}}{k} e^{-k|\tau|} = \mathcal{D} \tau_c e^{-|\tau|/\tau_c}$$

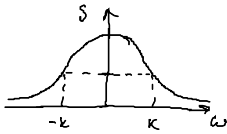
$S(\omega)$ - Spektrale Leistungsdichte $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} G(\tau)$

$$S(\omega) = \frac{\mathcal{D}}{2\pi k} \int_0^{\infty} d\tau e^{-k\tau} (e^{-i\omega\tau} + e^{i\omega\tau})$$

$$= \frac{\mathcal{D}}{2\pi k} \left[\frac{-1}{k+i\omega} e^{-k\tau-i\omega\tau} \Big|_0^{\infty} + \frac{-1}{k-i\omega} e^{-k\tau+i\omega\tau} \Big|_0^{\infty} \right]$$

$$S(\omega) = \frac{\mathcal{D}}{2\pi k} \left(\frac{1}{k+i\omega} + \frac{1}{k-i\omega} \right) = \frac{\mathcal{D}}{\pi} \frac{1}{(\omega^2+k^2)}$$

Lorentz-Kurve
(Halbwertsbreite $2k$)



Direkte Lösung der Langevin-Gl. $\dot{x} = -kx + \sqrt{2\mathcal{D}} \zeta(t)$

Subst. $y = x e^{kt}$
 $\dot{y} = (\dot{x} + kx) e^{kt}$
 $\dot{y} = [-kx + \sqrt{2\mathcal{D}} \zeta(t)] e^{kt} + kx e^{kt}$
 $\dot{y} = \sqrt{2\mathcal{D}} e^{kt} \zeta(t)$

$$\Rightarrow y(t) = \sqrt{2\mathcal{D}} \int_0^t e^{kt'} \zeta(t') dt' + y(0) = x(0) \text{ Anf. bed.}$$

$$x(t) = x(0) e^{-kt} + \sqrt{2\mathcal{D}} \int_0^t e^{-k(t-t')} \underbrace{\zeta(t') dt'}_{dW'}$$

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(0) \rangle e^{-kt} + \sqrt{2\mathcal{D}} \int_0^t e^{-k(t-t')} \underbrace{\langle \zeta(t') \rangle}_{0} dt'$$

zufällige Anf. wert.
(unkorrel. mit $\zeta(t)$)

Autokorr. fkt.

$$\langle x(t) x(t') \rangle = \langle x(t) \rangle \langle x(t') \rangle$$

$$= [\langle x(0)^2 \rangle - \langle x(0) \rangle^2] e^{-k(t+t')} + 2\mathcal{D} \int_0^t dt'' e^{-k(t-t'')} \int_0^{t'} dt''' e^{-k(t'-t''')} \underbrace{\langle \zeta(t'') \zeta(t''') \rangle}_{\delta(t''-t''')}$$

$$= [\langle x(0)^2 \rangle - \langle x(0) \rangle^2] e^{-k(t+t')} + 2\mathcal{D}/2k e^{-k(t+t')} e^{2kt''} \Big|_0^{t'}$$

$$= [\langle x(0)^2 \rangle - \langle x(0) \rangle^2 - \frac{\mathcal{D}}{k}] e^{-k(t+t')} + \frac{\mathcal{D}}{k} e^{-k|t-t'|}$$

stationär: $t, t' \rightarrow \infty$, $t-t'$ endlich

$$= \frac{\mathcal{D}}{k} e^{-k|t-t'|} \quad \text{wie aus FP-Gl.}$$

$\int dt''$ fällt weg für $t \geq t'$
sonst $\int dt'''$ weg

Varianz: $t = t'$

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \left[\langle \Delta x(0)^2 \rangle - \frac{D}{k} \right] e^{-k(t+t')/2} + \frac{D}{k} \xrightarrow[t, t' \rightarrow \infty]{\text{stationär}} \frac{D}{k} \quad \text{wie FP-Gl.}$$

3. Rauschinduzierte Oszillationen und Muster

Normalerweise ist Rauschen (noise) unerwünscht, schmiert die determ. Dynamik aus und macht sie irregulär (destruktiv)

Neues Phänomen: konstruktiver Einfluss von Rauschen in nichtlinearen Systemen.

- bestimmte Rauschintensität ist optimal

3.1 Stochastische Resonanz

Verstärkung eines schwachen period. Signals mit Hilfe von Rauschen

Resonanz als Fkt. der Rauschintensität

Lit. Gammaitoni, Hänggi, Jung, Marchesoni, Rev. Mod. Phys. 70, 223 (1998)

Benzi, Suter, Vulpani, J. Phys. A 14, L 451 (1981) } period.
Nicolis C., Nicolis G., Tellus 53, 225 (1991) } Wiederkehr
der Eiszeiten

(kleine period. Schwankungen der Erdachse und der Exzentrizität der Umlaufbahn - reichen allein nicht aus zur Erklärung der Klimaschwankungen, \Rightarrow stoch. Resonanz)

Weitere Beispiele: z.B. Stromkreis (Schmitt-Trigger)

instabiler Ringlaser

Neurophysiologie (Spiking; 2-Zustands-System)

z.B. Flusskrebs (crayfish)

• Löfflerstörche (paddlefish)

Quanten-Tunneln

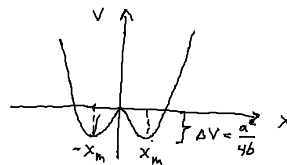
räum-zeitl. Systeme (anregbare Medien)

Überdämpftes Brown'sches Teilchen im bist. Potenzial

$$V(x) = -\frac{a}{2} x^2 + \frac{b}{4} x^4$$

mit period. Kraft $A_0 \cos(\Omega t)$

u. weißes Rauschen $\xi(t)$



Langevin - Gl.

$$\dot{x} = -V'(x) + A_0 \cos(\Omega t) + \xi(t)$$

$a=b=1$

$$\dot{x} = x - x^3 + A_0 \cos(\Omega t) + \xi(t)$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0$$

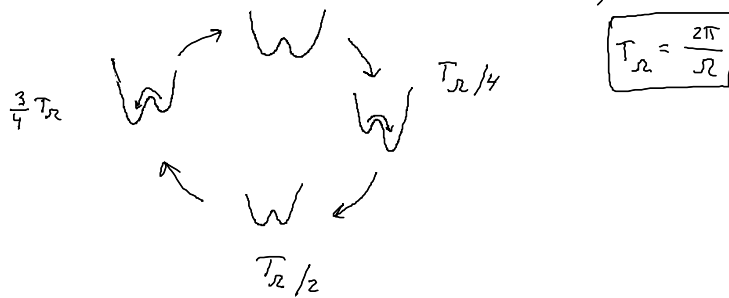
$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2D \delta(t-t')$$

Rauschinduz. Übergangsrate (Kramers-Rate)

zwischen $-x_m$ und $+x_m$ (ohne period. Kraft)

$$\nu_k = \frac{1}{T_k(\mathcal{D})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta V}{\mathcal{D}}\right) \quad (\alpha = \beta = 1)$$

period. Modulation des Pot. $V(x) \sim A_0 \cos(\Omega t)$:



\Rightarrow period. Osz. im bistabilen Pot. $\langle x(t) \rangle = \bar{x} \cos(\Omega t - \varphi_0)$

Verstärkung der Amplitude \bar{x} , wenn $T_R \approx 2 T_k(\mathcal{D})$
 $(\Omega \approx \pi \nu_k)$

\Rightarrow stochast. Resonanz