

English Summary:

3.7 Noise-induced spatio-temporal patterns

excitable media

1. Noise-induced fronts in semiconductor superlattices

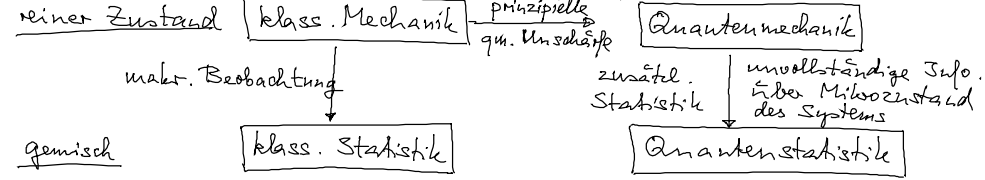
$$\begin{aligned} \epsilon_r \epsilon_0 (F_m - F_{m-1}) &= e(n_m - N_D) \\ \dot{n}_m &= J_{m-1 \rightarrow m} + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - J_{m \rightarrow m+1} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} D=0: \text{SNIPER bifurcation} \\ \text{(excitability type I)} \\ D \neq 0: \text{coherence resonance} \\ \text{exp.: Y. Hwang et al.} \\ \text{Europhys. Lett. 105, 47005 (2014)} \end{array} \right\}$$

2. Resonant tunnel diode

$$\begin{aligned} \dot{a} &= f(a, n) + D \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + D_a \xi(x, t) \\ \dot{n} &= \frac{1}{e} (U_0 - n - R J) + D_n \eta(t) \end{aligned} \left. \begin{array}{l} D=0: \text{supercrit. Hopf bifurcation} \\ \text{(breathing current filaments)} \\ D \neq 0: \text{noise-induced breathing} \\ \text{no coherence resonance (not excitable)} \end{array} \right\}$$

4. Quantenstatistik im Nichtgleichgewicht

4.1 Dichtematrix - statistischer Operator



4.1.1 Erwartungswerte

(i) Reine Zustände

Wahrscheinlichkeit für das Resultat  $|\alpha\rangle$  in reinen Zustand  $|\psi\rangle$   
 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

$$|\langle \alpha | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | \underbrace{|\alpha\rangle\langle\alpha|}_{\text{Projektor}} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_\alpha | \psi \rangle = |c_\alpha|^2$$

inhärenter statist. Charakter

Erwartungswert von  $\hat{M}$  im Zustand  $|\psi\rangle$ :

$$\langle \hat{M} \rangle = \langle \psi | \hat{M} | \psi \rangle = \sum_\alpha \langle \psi | \hat{M} | \alpha \rangle \langle \alpha | \psi \rangle \quad (*)$$

$$= \sum_{\alpha, \alpha'} \langle \psi | \alpha' \rangle \langle \alpha | \psi \rangle \underbrace{\langle \alpha' | \hat{M} | \alpha \rangle}_{M_{\alpha\alpha'}}$$

falls  $|\alpha\rangle$  Eigenbasis

$$= \sum_\alpha |c_\alpha|^2 M_\alpha$$

Eigenwert von  $\hat{M}$

$$\langle \hat{M} \rangle \stackrel{**}{=} \sum_\alpha \underbrace{\langle \alpha | \psi \rangle \langle \psi |}_{\hat{P}_\psi} \hat{M} | \alpha \rangle$$

$$= \text{tr} \left( \hat{P}_\psi \hat{M} \right) \quad \text{trace} = \text{Spur}$$

(ii) Quantenmechan. Gemisch

- unvollständige Info. über Mikrozustand, also Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p_i$  über die möglichen reinen Zustände  $|\varphi_i\rangle \in \mathcal{H}^{\text{Fock}}$

$$\begin{aligned}\langle \hat{M} \rangle &= \sum_i p_i \langle \varphi_i | \hat{M} | \varphi_i \rangle \quad \text{wobei: } \sum_i p_i = 1 \\ &= \sum_{ij} p_i \langle \varphi_i | \hat{M} | \varphi_j \rangle \langle \varphi_j | \varphi_i \rangle \\ &= \sum_{ij} \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle p_i \langle \varphi_i | \hat{M} | \varphi_j \rangle \\ &= \sum_{ij} \langle \varphi_j | \hat{\rho} \hat{M} | \varphi_j \rangle \quad \hat{\rho} = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| \\ &\quad \text{statistischer Op.} \\ &\quad = \text{Dichtematrix}\end{aligned}$$

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{M})$$

Es gilt:  $\text{tr} \hat{\rho} = 1$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\rho}^2 &\neq \hat{\rho} \\ \text{tr} \hat{\rho}^2 &< 1 \end{aligned} \right\} \text{Gleichheit gilt nur für reine Zustände} \\ (\hat{\rho} = \hat{\rho}^2, \quad \hat{\rho}^2 = \hat{\rho})$$

$$\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho} \quad \text{hermitesch}$$

Mittelwert eines Projektionsop.  $|\varphi_n\rangle \langle \varphi_n|$  :

$$\text{tr}(|\varphi_n\rangle \langle \varphi_n| \hat{\rho}) = \sum_i p_i |\langle \varphi_n | \varphi_i \rangle|^2 = \sum_i p_i |c_n^i|^2$$

$\hat{=}$  Wahrscheinl., den Zustand  $|\varphi_n\rangle$  bei Messung zu erhalten

Bem.: reine Zustände  $\rightarrow$  kohärente Überlagerung von Wahrscheinl. amplituden

$$\langle \hat{M} \rangle = \sum_{\alpha\alpha'} \langle \varphi | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{M} | \alpha' \rangle \langle \alpha' | \varphi \rangle$$

$\swarrow \quad \quad \quad \nwarrow$   
qm. Phase

$\Rightarrow$  Interferenzterme, falls  $\hat{M}$  nicht diagonal in  $|\alpha\rangle$

Gemisch  $\rightarrow$  inkohärente Überlagerung von reinen Zuständen

$\Rightarrow$  keine Interferenz!

4.1.2 Liouville-von Neumann-Gleichung

Zeitentwicklung der Dichtematrix im Schwödingerbild (Zust. zeitabh.)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_i\rangle = \hat{H} |\varphi_i\rangle$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \varphi_i| = \langle \varphi_i| \hat{H}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = \sum_i p_i (| \psi_i \rangle \langle \psi_i | + | \psi_i \rangle \langle \psi_i |)$$

$$= - \frac{i}{\hbar} \sum_i p_i ( \hat{H} | \psi_i \rangle \langle \psi_i | - | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \hat{H} )$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = - \frac{i}{\hbar} [ \hat{H}, \hat{\rho} ]$$

Vorsicht: nicht verwechseln mit Beweg.gl. für Op. im Heisenbergbild (dort anderes Vorzeichen!)

Liouville-von Neumann-Gl.

• Quantenmech. Analogon zur Liouville-Gl. der klass. Mech.

- Bem.:
- Für 1 Teilchen im 2-Niveaus-System (Basis: 2-Zust.) ist  $\hat{\rho}$  eine 2x2-Matrix, d.h. v. Neumann-Gl. liefert 4 Gl.
  - Für Vielteilchensystem (Halbleiter mit 2 Bändern) wird Basis im Fockraum benötigt

4.1.3 Verteilungsfkt. der Elektronen/Löcher im Halbleitern

$a_k^+$  Erzeugungsop. eines Elektrons im Zustand  $k$

$a_k$  Vernichtungsop. " " " "

Antikommutator  $\{ a_k^+, a_l^+ \} = \{ a_k, a_l \} = 0$

$$\{ a_k, a_l^+ \} = \delta_{kl}$$

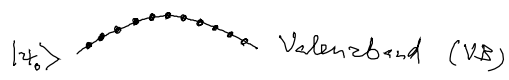
Antisymm. der Fermionen

Betrachte  $\langle a_k^+ a_k \rangle$  Mittelwert des Besetzungszahl op.  $a_k^+ a_k$

im gemischten Zustand  $\hat{\rho} = \sum_i p_i | \psi_i \rangle \langle \psi_i |$

$| \psi_i \rangle \in \mathcal{F}^{\text{Fock}}$  : mögliche Verteilung der Elektronen auf erlaubte (Vielteilchen-zust.) 1-Teilchen-Zustände  $k$  (reine Zustände)

Beispiel Halbleiter : Grundzustand bei  $T=0$   
 ↳ Leitungsband (LB)



$$\langle a_k^+ a_k \rangle = \text{tr} ( \hat{\rho} a_k^+ a_k ) = \sum_i p_i \langle \psi_i | a_k^+ a_k | \psi_i \rangle$$

$m_k^i$  Besetzung des 1-Teilchen-Zust.  $k$  im Vielteilchen-Zust.  $| \psi_i \rangle$   
 $m_k^i = 0, 1$

$$= \sum_i p_i m_k^i$$

$$= f_e(k) \quad \underline{\text{Verteilungsfkt.}}$$

(Max. von  $f_e(k)$ :  $n_k^i = 1 \quad \forall i \Rightarrow f_e(k) = \sum_i p_i = 1$ )

$f_e(k)$  ist die Wahrscheinl., ein  $E_1$ -Teil. bei  $k$  zu finden

- im reinen Zustand  $f_e(k) = 0$  oder  $f_e(k) = 1$
- im Gemisch  $0 \leq f_e(k) \leq 1$
- in thermodyn. Gleichgewicht ist  $f_e(k)$  die Fermi-Verteilung

Analog  $\langle d_k^+ d_k \rangle = f_h(k) \quad \underline{\text{Loch-Verteilungsfkt. (hole)}}$

$d_k^+$  Erzeugungsp. eines Loches in Zustand  $k$

$d_k$  Vernichtungsp. " "

Bem.: Falls Spin als extra Quantenzahl betrachtet wird:

$$f_e(k) = \frac{1}{2} \sum_s \langle a_{ks}^+ a_{ks} \rangle$$