English Summary:

4.2 Semiclassical interaction with light

$\hat{H}_{opt} = e\underline{r}\cdot\underline{E}(\underline{r},t)$

macroscopic polarization $\underline{P}(\underline{r},t) = \langle e\hat{\psi}^+(\underline{r},t)\underline{r}\hat{\psi}(\underline{r},t)\rangle$ qm. el. dipole density op.

field op.: $\hat{\psi}^+(\underline{r},t) = \sum_\lambda \psi^*_\lambda(\underline{r})a^+_\lambda$ creation op.

$\hat{\psi}(\underline{r},t) = \sum_\lambda \psi_\lambda(\underline{r})a_\lambda$ annihilation op.

microscopic interband polaris. $p(\underline{k},t) = \langle d_{\underline{k}} a_{\underline{k}}\rangle$

$p^*(\underline{k},t) = \langle a^+_{\underline{k}} d^+_{\underline{k}}\rangle$

$\hat{H}_{opt} = \sum_{\underline{k}} \underline{\mu}\cdot\underline{E}(t)\,(a^+_{\underline{k}}d^+_{\underline{k}} + d_{\underline{k}}a_{\underline{k}})$

$\underline{\mu}(\underline{k}) = \frac{1}{V}\int d^3r\, u_{c\underline{k}}(\underline{r})e\underline{r}\, u_{v\underline{k}}(\underline{r})$ el. dipole matrix element

Semiconductor Bloch eqs.:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{f}_e(\underline{k},t) &= \frac{1}{i}\Omega_p\,(p^*(\underline{k},t) - p(\underline{k},t)) \\ \dot{p}(\underline{k},t) &= \frac{1}{i}\omega_p(\underline{k})\,p(\underline{k},t) - \frac{1}{i}\Omega_p\,(f_e + f_h - 1) \\ \dot{f}_h(\underline{k},t) &= \dot{f}_e(\underline{k},t) \end{aligned}}$$

$\Omega_p = \frac{\underline{\mu}\cdot\underline{E}}{\hbar}$ Rabi frequency

$\omega_p(\underline{k}) = \frac{E_c(\underline{k}) - E_v(\underline{k})}{\hbar}$ opt. trans. frequ.

4.3 Quantisierung des Strahlungsfeldes

bisher: Materie qm.
el. magn. Feld klass. } semiklass. Bloch-Gln

jetzt: voll qm. Beschreibung des Lichtes $\rightarrow$ E-Feld wird Op.

Wozu? – Beschreibung von Vakuum-Fluktuationen
$\rightarrow$ spontane Emission
– Beschreibung korrelierter Photonen (Verschränkung)
– " nicht-klassischer Photonenstatistik
(anti-bunching bei Einzelphotonenemitter)
– gequetschte Zustände
– Lasing ohne Inversion

Quantisieren: Aufstellen von Vertauschungsrel. von Operatoren im Hilbertraum
phys. Observable $\rightarrow$ hermit. Op.

• 1. Quantisierung $\begin{pmatrix} x \rightarrow \hat{x} \\ p \rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla \end{pmatrix}$ führt auf Schrödingergl.

$[\hat{p}_i, \hat{x}_k] = \frac{\hbar}{i}\delta_{ik}\mathbb{1}$

$[\hat{p}_i, \hat{p}_k] = [\hat{x}_i, \hat{x}_k] = 0$

$i,k = 1,2,3$ kart. Koord.

Unschärfe $(\Delta\hat{A})^2 = \langle(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2\rangle$

$$\Delta\hat{A}\,\Delta B \geq \frac{1}{2}\,|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|$$

$$\Delta\hat{x}\,\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \text{qm. Unschärfe}$$

- 2. Quantisierung des Schrödinger'schen Wellenfeldes in der Vielteilchentheorie

$\rightarrow$ Vereinfachung der (Anti-) Symmetrisierung

Erzeugungs- u. Vernichtungs-Op. im Fock-Raum $\mathcal{H}_F = \sum_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}^N$

+ Quantisierungsvorschrift aus Symmetrieeigenschaften

$\rightarrow$ Bosonen $[\hat{a}_k^+, a_\ell^+] = [\hat{a}_k, \hat{a}_\ell] = 0$

$[a_k, a_\ell^+] = \delta_{k\ell}$

$\rightarrow$ Feldop. $\hat{\psi}^+(\mathbf{r}) := \sum_\lambda \psi_\lambda^*(\mathbf{r})\,\hat{a}_\lambda^+$

Lösung der Schrödingergl. eines Teilchens im Zustand λ

NB: Für el.magn. Feld ist Symm. a priori nicht bekannt

$\rightarrow$ Quantisierung über Lagrangefkt.

4.3.1 Feldquantisierung über Lagrange-Formalismus

Idee: Analog zur Punktmechanik aus Poisson-Klammer Vertauschungsrel. folgern

$L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \longrightarrow p_\alpha := \partial_{\dot{q}_\alpha} L$

Lagrangefkt. für Koord. q_α — kanon. Impulse

$$\{q_\alpha, p_{\alpha'}\} = \delta_{\alpha\alpha'} \xrightarrow{\text{Quantisierung}} [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

- Wirkungsprinzip für Punktmechanik

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0 \qquad \text{mit} \quad 0 = \delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad (1)$$

- Wirkungsprinzip für Felder $\psi(\mathbf{r}, t)$ (kontinuierlicher Grenzfall)

Teilchen $S_T = S(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$

Feld $S_F = S(\psi(\mathbf{r},t), \partial_t\psi(\mathbf{r},t), \partial_k\psi(\mathbf{r},t), t) \qquad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$

$$= \int dt \int d^3r\, \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}, \partial_k\psi, t)$$

Lagrangedichte

Lagrangefunktional $L := \int d^3r\, \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}, \partial_k\psi, t)$

$$= L(\psi, \dot\psi, t)$$

Hamilton-Prinzip $\delta S_F = 0$ mit $\delta\psi(\underline{r}, t_1) = \delta\psi(\underline{r}, t_2) = 0$

$$0 = \delta S_F = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \; \delta\mathcal{L}(\psi, \dot\psi, \partial_k\psi)$$

$$= \int d^3r \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi}\delta\dot\psi}_{\text{part. Int.}} + \underbrace{\sum_k \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)}\delta(\partial_k\psi)}_{\text{part. Int.}} \right]$$

$$= \int d^3r \left[\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)} \right)\delta\psi + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi}\delta\psi\Big|_{t_1}^{t_2}}_{\delta\psi=0 \text{ bei } t_1 \text{ und } t_2} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)}\delta\psi\right)}_{0 \text{ Vektordivergenz, Gauß'scher Satz}} \right]$$

$\delta\psi(\underline{r})$ unabhängig, frei variierbar

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)}}_{=\frac{\delta L}{\delta\psi}} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi} = 0} \quad (2) \qquad \text{Lagrange-Gl. für Felder}$$

$\frac{\delta L}{\delta \psi}$ ≙ Funktionalableitung von L

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\{ L(\psi(\underline{r}') + \varepsilon\delta(\underline{r}-\underline{r}'), \dot\psi(\underline{r}')) - L(\psi(\underline{r}'), \dot\psi(\underline{r}'))\}$$

- verallg. Impuls zu $\psi(\underline{r})$: $\boxed{\pi(\underline{r}) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi}}$
- Hamiltondichte $\mathcal{H} = \pi(\underline{r})\dot\psi(\underline{r}) - \mathcal{L}$
- Hamiltonfunktional $H = \int d^3r\, \mathcal{H} = \int d^3r\, \pi(\underline{r})\dot\psi(\underline{r}) - L$
- Poissonklammer $\dot F = \int d^3r \left(\frac{\delta F}{\delta\psi}\dot\psi + \frac{\delta F}{\delta\pi}\dot\pi \right) =: \{F, H\}$

$$\text{mit } \frac{\delta H}{\delta\psi} = -\dot\pi$$
$$\frac{\delta H}{\delta\pi} = \dot\psi$$

$$\Rightarrow \{\psi(\underline{r}), \pi(\underline{r}')\} = \delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

Übergang zur Quantentheorie $\psi \to \hat\psi$, $\pi \to \hat\pi$

- Vertauschungsrel. aus Poisson-Klammer $\boxed{[\hat\psi(\underline{r}), \hat\pi(\underline{r}')] = i\hbar\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$
- Zeitentwicklung $\dot{\hat F} = \frac{1}{i\hbar}[\hat F, \hat H]$

4.3.2 Lagrangedichte ~~frei~~ freies el.-magn. Feld

Frage: $\mathcal{L}$?

Wähle $\mathcal{L}$ so, dass Lagrange-Feldgln. die klass. Feldgln. reproduzieren!

Tipp: klass. Feldenergie $E_{EM} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\, \underline{E}(\underline{r},t)\cdot\underline{E}(\underline{r},t) + \frac{1}{2\mu_0}\int d^3r\, \underline{B}\cdot\underline{B}$

- klass. Feldgl.: E-Dyn. mit Coulomb-Eichung $\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = 0$

(I) $\Delta\underline{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\underline{A}} = 0$ $\qquad \underline{E} = -\dot{\underline{A}} - \nabla\underbrace{\Phi}_{=0}$

(II) $\Delta\Phi = 0 \overset{\text{oBdA}}{\Longrightarrow} \Phi = 0$ $\qquad \underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$

$\Rightarrow$ Vektorfeld $\underline{A}$ ist das zu quantisierende Feld ψ

- Ansatz $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\,\underline{E}\cdot\underline{E} - \frac{1}{\mu_0}\underline{B}\cdot\underline{B}\right)$

Einsetzen in (2) wobei

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_k} = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_k} = \varepsilon_0\dot{A}_k$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k A_i)} = -\frac{1}{\mu_0}\partial_{x_k}A_i$$

$$\left(\underline{B}^2 = (\underline{\nabla}\times\underline{A})^2 = \epsilon_{kij}\epsilon_{kln}\partial_{x_i}A_j\cdot\partial_{x_l}A_n\right)$$

$\Rightarrow$ Lagrange-gl. liefert Wellengl. für $\underline{A}$: $\Delta\underline{A} - \underbrace{\frac{1}{c^2}}_{=\varepsilon_0\mu_0}\ddot{\underline{A}} = 0$

kanon. konjug. Feld $\boxed{\pi_k = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_k} = \varepsilon_0\dot{A}_k = -\varepsilon_0 E_k}$

Hamiltondichte $\to$ Hamiltonfunktional

$$H = \int d^3r\left(\sum_{k=1}^{3}\left(\pi_k\dot{A}_k - \frac{\varepsilon_0}{2}\dot{A}_k^2\right) + \frac{1}{2\mu_0}(\underline{\nabla}\times\underline{A})^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3r\sum_k\left(\varepsilon_0 E_k^2 + \frac{1}{\mu_0}B_k^2\right) \quad \hat{=} \text{ Feldenergie}$$

- Quantisierung: $[\hat{A}_k(\underline{r}), \hat{\pi}_{k'}(\underline{r}')] = i\hbar\,\delta_{kk'}\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')$

$$[\hat{A}_k(\underline{r}), \hat{A}_{k'}(\underline{r}')] = 0$$