English Summary:

Master eq. for one-step processes (birth-death): $W_{nn'} = r_{n'}\,\delta_{n,n'-1} + g_{n'}\,\delta_{n,n'+1}$

recomb. generation

$$\boxed{\dot{p}_n = r_{n+1}\,p_{n+1} + g_{n-1}\,p_{n-1} - (r_n + g_n)\,p_n}$$

stat. sol. $\boxed{p_n^* = p_0^* \prod_{n'=1}^{n} \frac{g_{n'-1}}{r_{n'}}}$

rate eqs. for $\langle N(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n\,p_n(t)$

$\langle \dot{N}\rangle = \langle g_n\rangle - \langle r_n\rangle$; $\langle \dot{N}\rangle = -\gamma\langle N\rangle$ for linear decay

2.2 Fokker-Planck-Gleichung

Zeitentwicklung eines kontinuierlichen Markov-Prozesses:

$X(t)$ (1-dim. Zufallsvar.)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} p(x,t\,|\,x_0,t_0) = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x,t)\,p(x,t\,|\,x_0,t_0)\right]}_{\text{Drift}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[B(x,t)\,p(x,t\,|\,x_0,t_0)\right]}_{\text{Diffusion}}}$$

Anfangsbed. $p(x,t_0\,|\,x_0,t_0) = \delta(x-x_0)$

$\hat{=}$ Ein-Zeit-Wahrsch. $p(x,t) = \int dx_0\, p(x,t;x_0,t_0) = \int dx_0\, p(x,t\,|\,x_0,t_0)\,p(x_0,t_0)$

mit Anf. bed. $p(x,t_0)$ (weniger singulär)

Randbed. (n-dim.)

Fokker-Planck (FP)-gl. ist lokale Bilanzgl.

$$\boxed{\frac{\partial p(\underline{x},t)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} J_i(\underline{x},t) = 0} \qquad (\dot{p} + \operatorname{div}\underline{J} = 0)$$

$\left(\begin{array}{l}\text{vgl. Teilchendichte } \varrho \\ \dot{\varrho} + \operatorname{div}\underline{J} = 0 \\ \underline{J} = \underline{v}\varrho - D\,\underline{\nabla}\varrho \\ \Rightarrow \dot{\varrho} = -\varrho\,\underline{\nabla}\cdot\underline{v} + D\,\Delta\varrho\end{array}\right)$

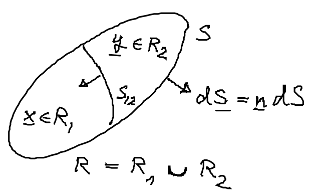
mit Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$J_i(\underline{x},t) = A_i(\underline{x},t)\,p(\underline{x},t) - \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(B_{ij}(\underline{x},t)\,p(\underline{x},t)\right)$$

globale Bilanzgl. für Gebiet $R \in \mathbb{R}^n$

$$P(R,t) := \int_R d^n x\; p(\underline{x},t)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\int_S d\underline{S}\cdot\underline{J}(\underline{x},t) \quad \left(\begin{array}{c}\text{Gauß'scher}\\ \text{Satz}\end{array}\right)$$



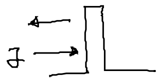
Netto-Wahrscheinl.fluss durch bel. Fläche S_{12}:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{R_1} d^n x \int_{R_2} d^n y \left[\underbrace{p(\underline{x},t+\Delta t;\underline{y},t)}_{R_1 \leftarrow R_2} - \underbrace{p(\underline{y},t+\Delta t;\underline{x},t)}_{R_2 \leftarrow R_1}\right] = \int_{S_{12}} d\underline{S}\cdot\underline{J}(\underline{x},t)$$

Randbed.:

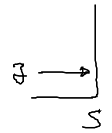
(a) <u>Reflektierende Barriere</u>:

$$\underline{n} \cdot \underline{J}(\underline{x},t)\Big|_{\underline{x}\in S} = 0$$



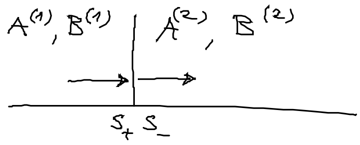
(b) <u>Absorbierende Barriere:</u>

$$p(\underline{x},t)\Big|_{\underline{x}\in S} = 0$$



Teilchen aus dem System entfernt

(c) <u>Grenzfläche</u> zwischen 2 Medien:



$$\underline{n} \cdot \underline{J}\Big|_{S_+} = \underline{n} \cdot \underline{J}\Big|_{S_-}$$

$$p\Big|_{S_+} = p\Big|_{S_-}$$

(d) <u>Period. Randbed.</u>

$p(a,t) = p(b,t)$
$J(a,t) = J(b,t)$

(e) <u>Natürliche Randbed.</u>: $A(a,t) = 0$
(Geschw. $= 0$, Rand wird nie erreicht)

<u>Stationäre Lösung für homogenen Markov-Prozess</u>

homogen $\Rightarrow$ A, B unabh. von t

1-dim. $\frac{d}{dx} J(x,t) = 0 \quad \Rightarrow J(x) = \text{const.} = J(a) = J(b)$

(i) <u>reflekt. Randbed.</u> $\Rightarrow \quad J(x) = 0$

$$\Rightarrow A(x)\, p^*(x) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx}\left[B(x)\, p^*(x)\right] = 0 \quad \Rightarrow 2 \frac{A}{B} dx = \frac{d(Bp^*)}{Bp^*}$$

$$\Rightarrow \boxed{p^*(x) = \frac{\mathcal{N}}{B(x)} \exp\left[2 \int_a^x dx' \frac{A(x')}{B(x')}\right]}$$

Potentiallösung, Normierung $\int_a^b dx\, p^*(x) = 1 \quad \Rightarrow \mathcal{N}$

(ii) <u>period. Randbed.</u> $\Rightarrow J(x) = J$

$$A(x)\, p^*(x) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx}\left[B(x)\, p^*(x)\right] = J \qquad (1) \quad \text{lin. inhom. Dgl.}$$

Mit $\psi(x) := \exp\left[2 \int_a^x dx' \frac{A(x')}{B(x')}\right]$ ergibt sich

$$A \frac{\psi}{B} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \psi = 0 \qquad \left(\text{homog. Lös. } p^* = \frac{\psi}{B}\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{B}{2}\frac{\Psi'}{\Psi} \quad \overset{\text{in (1)}}{\Longrightarrow} \quad Bp^* \frac{\Psi'}{\Psi} - (Bp^*)' = 2J$$

$$\Rightarrow \frac{-(Bp^*)\Psi' + (Bp^*)'\Psi}{\Psi^2} = -\frac{2J}{\Psi}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Bp^*}{\Psi}\right)' = -\frac{2J}{\Psi}$$

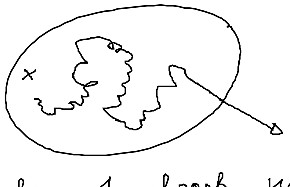
$$\overset{\int_a^x dx'}{\Longrightarrow} \left.\frac{Bp^*}{\Psi}\right|_a^x = -2J \int_a^x \frac{dx'}{\Psi(x')} \quad \Rightarrow p^*(x)$$

Bestimmung von J durch period. Randbed. $p^*(a) = p^*(b)$

$$\Rightarrow p^*(x) = p^*(a) \frac{\int_a^x \frac{dx'}{\Psi(x')} \frac{B(b)}{\Psi(b)} + \int_x^b \frac{dx'}{\Psi(x')} \frac{B(a)}{\Psi(a)}}{\frac{B(x)}{\Psi(x)} \int_a^b \frac{dx'}{\Psi(x')}}$$

First passage time

Fragestellung: Wie lange hält sich ein Teilchen in einem vorgegebenen Gebiet auf?



Teilchen zwischen 1 absorb. und 1 reflektierenden Barriere

Ziel: Entweichzeit T (escape time)

Wahrsch., dass das Teilchen zur Zeit t noch in (a,b), wenn es bei x gestartet ist:

$$G(x,t) := \int_a^b dx'\, p(x',t|x,0) \equiv \text{Prob}(T \geq t)$$

stationärer Prozess: $p(x',t|x,0) = p(x',0|x,-t)$

Rückwärts-FP-Gl.: Rückwärtsentw. für $t' < t$ aus (x,t)

$$\frac{\partial p(x,t|y,t')}{\partial t'} = -A(y,t')\frac{\partial p(x,t|y,t')}{\partial y} - \frac{1}{2}B(y,t')\frac{\partial^2 p(x,t|y,t')}{\partial y^2}$$

homog. (A, B zeitunabh.):

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x,t) = -\frac{\partial}{\partial t'} \int_a^b dx'\, p(x',0|x,\underbrace{t'}_{=-t})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x,t) = A(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x,t) + \frac{1}{2} B(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,t)$$

Statt Anf. bed. „End" bed.: $p(x',0 \mid x,0) = \delta(x'-x)$

$$\Rightarrow G(x,0) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Randbed.: 1 reflekt. + 1 abs.

$$\partial_x G(a,t) = 0 \qquad G(b,t) = 0$$

(absorb. Randbed. bedeutet: $\mathrm{Prob}(T \geq t) = 0$ wenn $x = b$

$\Leftrightarrow G(b,t) = 0$ (sofortige Absorption))

<u>mittlere erste Übergangszeit</u> (mean first passage time)

$$T(x) := \langle T \rangle = -\int_0^\infty t\, dG = -\int_0^\infty dt\, t \frac{\partial}{\partial t} G(x,t) \overset{\text{part.}}{\underset{\text{Int.}}{=}} \int_0^\infty dt\, G(x,t)$$

Dgl. für $T(x)$ aus der Rückwärts-FP-Gl.:

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} G(x,t)\, dt = \underbrace{G(x,\infty)}_{0} - \underbrace{G(x,0)}_{1} = -1$$

$$(**) \quad A(x) \frac{\partial}{\partial x} T(x) + \frac{1}{2} B(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x) \overset{!}{=} -1$$

Randbed. $T'(a) = 0$ (refl.), $T(b) = 0$ (absorb.)

T ausgedrückt durch Lösung der homog. Gl. $A\psi - \frac{1}{2} B \frac{\partial}{\partial x}\psi = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{A}{B} dx = \frac{d\psi}{\psi}$$

$$\Leftrightarrow \psi(x) = \exp\left[2 \int_a^x dx' \frac{A(x')}{B(x')}\right]$$

$\Rightarrow$ Lösung der <u>inhomog.</u> Gl. $(**)$ $T(x)$ durch $\psi(x)$ ausgedrückt:

$$\boxed{T(x) = 2 \int_x^b \frac{dy}{\psi(y)} \int_a^y dz \frac{\psi(z)}{B(z)}} \qquad (*)$$

<u>Beweis</u>: $$T' = -\frac{2}{\psi(x)} \int_a^x dz \frac{\psi(z)}{B(z)}$$

$$T'' = -\frac{2}{\psi(x)^2}\left[\frac{\psi(x)^2}{B(x)} - \psi'(x)\int_a^x dz\,\frac{\psi(z)}{B(z)}\right]$$

(**)

$$\Rightarrow AT' + \frac{1}{2}BT'' = \underbrace{\cancel{-\frac{2A}{\psi}\int_a^x dz\,\frac{\psi}{B}}} - \Big[1 - \underbrace{\cancel{\overbrace{\frac{B}{\psi^2}\psi'}^{2A/\psi}\int_a^x dz\,\frac{\psi}{B}}}\Big] \overset{!}{=} -1$$

$$\psi' = \frac{2A}{B}\psi \Rightarrow \frac{B\psi'}{\psi^2} = \frac{2A}{\psi}$$

Randbed.: $T'(a) = \int_0^\infty dt\,\frac{\partial}{\partial x}G(x,t)\Big|_{x=a} = 0$ ✓

$T(b) = 0$ ✓ □