

English Summary:

Master eq. for one-step processes (birth-death):  $\dot{w}_{nn'} = r_{n'} \delta_{n, n'-1} + g_{n'} \delta_{n, n'+1} - (r_n + g_n) w_{nn}$   
 recomb. generation

$$\dot{p}_n = r_{n+1} p_{n+1} + g_{n-1} p_{n-1} - (r_n + g_n) p_n$$

stat. sol. 
$$p_n^* = p_0^* \prod_{n'=1}^n \frac{g_{n'-1}}{r_{n'}}$$

rate eqs. for  $\langle N(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(t)$

$\langle \dot{N} \rangle = \langle g_n \rangle - \langle r_n \rangle$  ;  $\langle \dot{N} \rangle = -\gamma \langle N \rangle$  for linear decay

2.2 Fokker-Planck-Gleichung

Zeitentwicklung eines kontinuierlichen Markov-Prozesses:

$X(t)$  (1-dim. Zufallsvar.)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x_0, t_0) = - \frac{\partial}{\partial x} [A(x, t) p(x, t | x_0, t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x, t) p(x, t | x_0, t_0)]$$

Drift Diffusion

Anfangsbed.  $p(x, t_0 | x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$

$\cong$  Ein-Zeit-Wahrsch.  $p(x, t) = \int dx_0 p(x, t; x_0, t_0) = \int dx_0 p(x, t | x_0, t_0) p(x_0, t_0)$

mit Anf. bed.  $p(x, t_0)$  (weniger singulär)

Randbed. (n-dim.)

Fokker-Planck (FP)-gl. ist lokale Bilanzgl.

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} J_i(x, t) = 0 \quad (\dot{\rho} + \text{div } \underline{J} = 0)$$

mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$J_i(x, t) = A_i(x, t) p(x, t) - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} [B_{ij}(x, t) p(x, t)]$

(vgl. Teilchendichte  $g$ )

$$\begin{cases} \dot{g} + \text{div } \underline{J} = 0 \\ \underline{J} = v g - D \nabla g \\ \Rightarrow \dot{g} = -g \nabla \cdot v + D \Delta g \end{cases}$$

globale Bilanzgl. für Gebiet  $R \in \mathbb{R}^n$

$P(R, t) := \int_R d^n x p(x, t)$

$\frac{\partial P}{\partial t} = - \int_S dS \cdot \underline{J}(x, t)$  (Gaußscher Satz)



$R = R_1 \cup R_2$

Netto-Wahrscheinlichkeitsfluss durch bel. Fläche  $S_{12}$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{R_1} d^n x \int_{R_2} d^n y [p(x, t + \Delta t, y, t) - p(y, t + \Delta t, x, t)] = \int_{S_{12}} dS \cdot \underline{J}(x, t)$$

$R_1 \leftarrow R_2$        $R_2 \leftarrow R_1$

Randbed.:

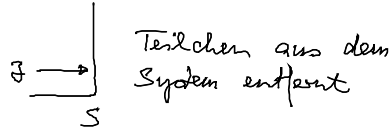
(a) Reflektierende Barriere:

$$n \cdot \underline{J}(x, t) \Big|_{x \in S} = 0$$



(b) Absorbierende Barriere:

$$p(x, t) \Big|_{x \in S} = 0$$



(c) Grenzfläche zwischen 2 Medien:  $A^{(1)}, B^{(1)}$  |  $A^{(2)}, B^{(2)}$

$$n \cdot \underline{J} \Big|_{s_+} = n \cdot \underline{J} \Big|_{s_-}$$

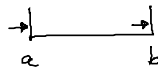


$$p \Big|_{s_+} = p \Big|_{s_-}$$

(d) Period. Randbed.

$$p(a, t) = p(b, t)$$

$$\underline{J}(a, t) = \underline{J}(b, t)$$



(e) Natürliche Randbed.:  $A(a, t) = 0$

(Geschw. = 0, Rand wird nie erreicht)

Stationäre Lösung für homogenen Master-Prozess

homogen  $\Rightarrow A, B$  unabh. von  $t$

1-dim.  $\frac{d}{dx} \underline{J}(x, t) = 0 \Rightarrow \underline{J}(x) = \text{const.} = \underline{J}(a) = \underline{J}(b)$

(i) reflekt. Randbed.  $\Rightarrow \underline{J}(x) = 0$

$$\Rightarrow A(x) p^*(x) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [B(x) p^*(x)] = 0 \Rightarrow 2 \frac{A}{B} dx = \frac{d(B p^*)}{B p^*}$$

$$\Rightarrow p^*(x) = \frac{\sqrt{B(x)}}{B(x)} \exp \left[ 2 \int_a^x dx' \frac{A(x')}{B(x')} \right]$$

Potentiallösung, Normierung  $\int_a^b dx p^*(x) = 1 \Rightarrow \int$

(ii) period. Randbed.  $\Rightarrow \underline{J}(x) = \underline{J}$

$$A(x) p^*(x) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [B(x) p^*(x)] = \underline{J} \quad (1) \text{ lin. inhom. Dgl.}$$

Mit  $\varphi(x) := \exp \left[ 2 \int_a^x dx' \frac{A(x')}{B(x')} \right]$  ergibt sich

$$A \frac{\varphi}{B} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \varphi = 0 \quad (\text{homog. Lös. } p^* = \frac{\varphi}{B})$$

$$\Rightarrow A = \frac{B}{2} \frac{\varphi'}{\varphi} \stackrel{\text{in (1)}}{\Rightarrow} B p^* \frac{\varphi'}{\varphi} - (B p^*)' = 2J$$

$$\Rightarrow \frac{-(B p^*)' \varphi + (B p^*) \varphi'}{\varphi^2} = -\frac{2J}{\varphi}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{B p^*}{\varphi} \right)' = -\frac{2J}{\varphi}$$

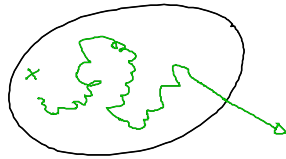
$$\Rightarrow \int_a^x \frac{dx'}{\varphi} \frac{B p^*}{\varphi} \Big|_a^x = -2J \int_a^x \frac{dx'}{\varphi(x)} \Rightarrow p^*(x)$$

Bestimmung von  $J$  durch period. Randbed.  $p^*(a) = p^*(b)$

$$\Rightarrow p^*(x) = p^*(a) \frac{\int_a^x \frac{dx'}{\varphi(x')} \frac{B(b)}{\varphi(b)} + \int_x^b \frac{dx'}{\varphi(x')} \frac{B(a)}{\varphi(a)}}{\frac{B(x)}{\varphi(x)} \int_a^b \frac{dx'}{\varphi(x')}} \quad \text{refl.}$$

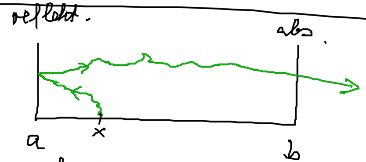
### First passage time

Fragestellung: Wie lange hält sich ein Teilchen in einem vorgegebenen Gebiet auf?



Teilchen zwischen 1 absorb. und 1 reflektierenden Barriere

Ziel: Entweichzeit  $T$  (escape time)



Wahrsch., dass das Teilchen zur Zeit  $t$  noch in  $(a, b)$ , wenn es bei  $x$  gestartet ist:

$$G(x, t) := \int_a^b dx' p(x', t | x, 0) \equiv \text{Prob}(T \geq t)$$

$$\text{stationärer Prozess: } p(x', t | x, 0) = p(x', 0 | x, -t)$$

Rückwärts-FP-gl.: Rückwärtsentw. für  $t' < t$  aus  $(x, t)$

$$\frac{\partial p(x, t | y, t')}{\partial t'} = -A(y, t') \frac{\partial p(x, t | y, t')}{\partial y} - \frac{1}{2} B(y, t') \frac{\partial^2 p(x, t | y, t')}{\partial y^2}$$

homog. ( $A, B$  zeitunabh.):

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x, t) = -\frac{\partial}{\partial t'} \int_a^b dx' p(x', 0 | x, t') \Big|_{t'=t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x,t) = A(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x,t) + \frac{1}{2} B(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,t)$$

statt Anf. bed. „End“ bed. :  $p(x',0 | x,0) = \delta(x' - x)$

$$\Rightarrow G(x,0) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Randbed.: 1 reflekt. + 1 abs.

$$\frac{\partial_x G(a,t) = 0 \quad G(b,t) = 0$$

(absorb. Randbed. bedeutet:  $\text{Prob}(T \geq t) = 0$  wenn  $x=b$   
 $\Leftrightarrow G(b,t) = 0$  (sofortige Absorption))

mittlere erste Übergangszeit (mean first passage time)

$$T(x) := \langle T \rangle = - \int_0^\infty t dG = - \int_0^\infty dt t \frac{\partial}{\partial t} G(x,t) \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \int_0^\infty dt G(x,t)$$

Dgl. für  $T(x)$  aus der Rückwärts-FP-Gl.:

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} G(x,t) dt = \underbrace{G(x,\infty)}_0 - \underbrace{G(x,0)}_1 = -1$$

$$(**) A(x) \frac{\partial}{\partial x} T(x) + \frac{1}{2} B(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x) = -1$$

Randbed.  $T'(a) = 0$  (refl.),  $T(b) = 0$  (absorb.)

$T$  ausgedrückt durch Lösung der homog. Gl.  $A\psi - \frac{1}{2} B \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{A}{B} dx = \frac{d\psi}{\psi}$$

$$\Leftrightarrow \psi(x) = \exp \left[ 2 \int_a^x dx' \frac{A(x')}{B(x')} \right]$$

$\Rightarrow$  Lösung der inhomog. Gl. (\*\*\*)  $T(x)$  durch  $\psi(x)$  ausgedrückt:

$$T(x) = 2 \int_x^b \frac{dy}{\psi(y)} \int_a^y dz \frac{\psi(z)}{B(z)} \quad (*)$$

Beweis:  $T' = - \frac{2}{\psi(x)} \int_a^x dz \frac{\psi(z)}{B(z)}$

$$T'' = - \frac{2}{\varphi(x)^2} \left[ \frac{\varphi(x)^2}{B(x)} - \varphi'(x) \int_a^x dz \frac{\varphi(z)}{B(z)} \right]$$

(\*\*)

$$\Rightarrow AT' + \frac{1}{2}BT'' = - \frac{2A}{\varphi} \int_a^x dz \frac{\varphi}{B} - \left[ 1 - \frac{B}{\varphi^2} \varphi' \int_a^x dz \frac{\varphi}{B} \right] = -1$$

$\varphi' = \frac{2A}{B}\varphi \Rightarrow \frac{B\varphi'}{\varphi^2} = \frac{2A}{\varphi}$

$$\text{Randbed. : } T'(a) = \int_0^\infty dt \frac{\partial}{\partial x} G(x,t) \Big|_{x=a} = 0 \quad \checkmark$$

$$T(b) = 0 \quad \checkmark \quad \square$$