English Summary:

fields $\hat{A}_k = \sum_\lambda \tilde{A}_{\lambda k}(r)\,(\hat{a}_\lambda(0)e^{i\omega_\lambda t} + \hat{a}^+_\lambda(0)e^{-i\omega_\lambda t})$ Heisenberg op. $a_\lambda(t), a^+_\lambda(t)$

$$\hat{E}_k = -\frac{1}{\varepsilon_0}\hat{\Pi}_k = -\dot{\hat{A}}_k\,,\quad \hat{B}_k = \epsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{A}_j$$

free photon Hamiltonian $\boxed{\hat{H} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda(\hat{n}_\lambda + \tfrac{1}{2})}$

photon number op. $\boxed{\hat{n}_\lambda = \hat{a}^+_\lambda \hat{a}_\lambda}$

4.4. Quantum states of light

4.4.1 Fock states = photon number states $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n|0\rangle$

$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$ phase undetermined, amplitude (energy) sharp

(maximally nonclassical)

$\langle\hat{n}\rangle = n \qquad \langle(\Delta\hat{n})^2\rangle = 0$

$\langle\hat{E}\rangle = 0 \qquad \langle(\Delta\hat{E})^2\rangle = |c|^2(2\langle\hat{n}\rangle + 1)\,,\quad \hat{E} = C\hat{a} + C^*\hat{a}^+$

4.4.2 Glauber-Zustände – kohärente Zustände

Roy Glauber, Phys. Rev. 130, 2529 (1963)

Nobelpreis 2005

Idee: minimale Unschärfe → verschobener Vakuumzustand

Ansatz: suche Eigenzustände zu $\hat{a}$ (Glauber-Zustand)

Eigenwertgl. $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

Entwicklung nach Fock-Zuständen $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}\,c_n|n-1\rangle \overset{!}{=} \alpha\sum_{n=0}^{\infty}c_n|n\rangle$$

$$= \alpha\sum_{n=0}^{\infty}c_{n-1}|n-1\rangle$$

$$\Rightarrow c_n\sqrt{n} = \alpha c_{n-1}$$

rekursiv: $c_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} c_{n-1} = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$

$$c_{n-1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} c_{n-2}$$

$$c_{n-2} = \frac{\alpha}{\sqrt{n-2}} c_{n-3}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle}$$

aus Normierung $\langle\alpha|\alpha\rangle \overset{!}{=} 1 = |c_0|^2 \sum_{n,n'} \frac{\alpha^{*n}\alpha^{n'}}{\sqrt{n!\,n'!}} \underbrace{\langle n|n'\rangle}_{\delta_{nn'}}$

$$= |c_0|^2 e^{|\alpha|^2}$$

$$\boxed{c_0 = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}}$$

Poisson-Verteilung der Photonen auf Fock-Zustände

$$p(n) = \langle n|\alpha\rangle\langle\alpha|n\rangle = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!} = \frac{\langle n\rangle^n e^{-\langle n\rangle}}{n!}$$

Bem.: Zustände sind nicht orthogonal (nur näherungsweise):

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}$$

Statistische Eigenschaften im Zustand $|\alpha\rangle$

- Feldstärkestatistik $\qquad \alpha = |\alpha| e^{i\theta}$

Mittelwert $\langle\alpha|\hat{E}|\alpha\rangle = C\alpha + C\alpha^* = 2C|\alpha|\cos\theta \qquad C \in \mathbb{R}$

Varianz $\langle(\Delta\hat{E})^2\rangle = \langle\alpha|\hat{E}^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|\hat{E}|\alpha\rangle^2$

$$= \langle\alpha|C^2(\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a}^+ + \underbrace{\hat{a}\hat{a}^+}_{1+\hat{a}^+\hat{a}} + \hat{a}^+\hat{a})|\alpha\rangle - 4C^2|\alpha|^2\cos^2\theta$$

$$= C^2(|\alpha|^2 e^{2i\theta} + |\alpha|^2 e^{-2i\theta} + 1 + 2|\alpha|^2) - 4C^2|\alpha|^2\cos^2\theta$$

$$= C^2|\alpha|^2 \underbrace{(2\cos(2\theta) + 2 - 4\cos^2\theta)}_{0} + C^2$$

$$= C^2$$

Varianz der Feldstärke im Glauber-Zustand $|\alpha\rangle$ entspricht der Varianz im Vakuum (Fock-Zustand $|0\rangle$),

Unschärfe unabhängig von α

- Photonenstatistik

$$\langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^+\hat{a}|\alpha\rangle = \boxed{|\alpha|^2 = \bar{n}} \quad \text{mittlere Photonenzahl}$$

$$\langle\alpha|\hat{n}^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^+\underbrace{\hat{a}\hat{a}^+}_{[\hat{a},\hat{a}^+]=1}\hat{a}|\alpha\rangle$$

$$= \langle\alpha|(\hat a^+ \hat a^+ \hat a \hat a + \hat a^+ \hat a)|\alpha\rangle$$
$$= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 = \bar n^2 + \bar n$$

Varianz $\langle(\Delta\hat n)^2\rangle = \bar n^2 + \bar n - \bar n^2 = \bar n$

- Photonenzahl fluktuiert um $\bar n$ mit $\sqrt{\bar n}$
- $\neq 0$ ($=0$ im Fock-Zustand)

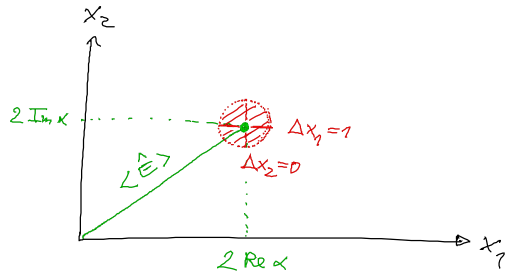
- Quadraturkomponenten $\hat x_1$, $\hat x_2$ $\quad \hat x_1 = \hat a(0) + \hat a^+(0)$, $\quad \hat x_2 = i(\hat a(0) - \hat a^+(0))$

$$\langle\alpha|\hat x_1|\alpha\rangle = 2\,\mathrm{Re}\,\alpha$$
$$\langle\alpha|\hat x_2|\alpha\rangle = 2\,\mathrm{Im}\,\alpha$$

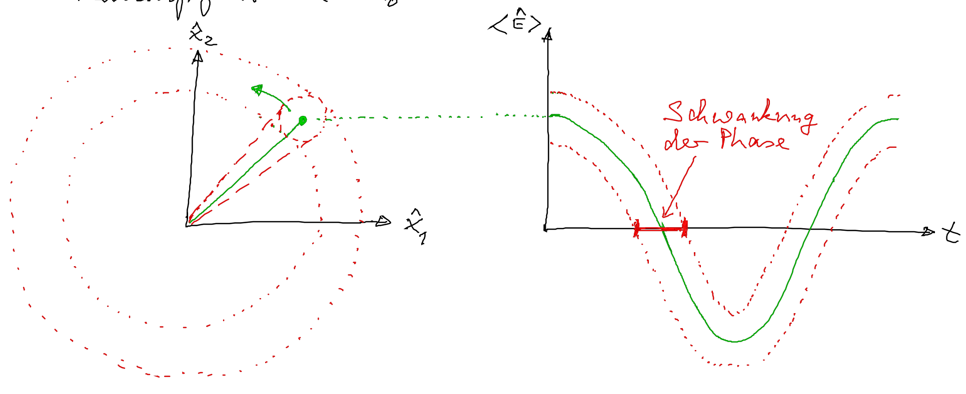
einmodiges E-Feld: $\hat E = -C(\hat x_2 \sin\omega t + \hat x_1 \cos\omega t)$

Schwankung

$$\langle\alpha|(\Delta\hat x_1)^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|(\Delta\hat x_2)^2|\alpha\rangle$$
$$= \langle\alpha|\underbrace{\hat a\hat a^+}_{1+\hat a^+\hat a} + \hat a^+\hat a + \hat a\hat a + \hat a^+\hat a^+|\alpha\rangle - (2\,\mathrm{Re}\,\alpha)^2$$
$$= 1$$



- Zeitabhängigkeit $\alpha = \alpha_0 e^{-i\omega t}$



Bem.: $\dfrac{\sqrt{(\Delta\hat n)^2}}{\langle n\rangle} = \dfrac{1}{\sqrt{\bar n}} \to 0$ relative Schwankung verschwindet für große Photonenzahl (also große $|\alpha|$)

- im Glauber-Zustand hat E relativ bestimmte Phase + Amplitude

$$\boxed{\text{kohärenter Zustand} = \text{klass. Zustand}}$$

- Glauber-Zustände können durch qm. <u>Verschiebungsop.</u> aus dem Vakuum-Zustand erzeugt werden

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \qquad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n |0\rangle$$

$$= \underbrace{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha^n (\hat{a}^+)^n}_{\hat{D}(\alpha)} |0\rangle \qquad \text{Verschiebungsop.}$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^+} |0\rangle$$

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^+} \underbrace{e^{-\alpha^* \hat{a}}}_{\text{ändert } |0\rangle \text{ nicht}}$$

es gilt $e^{A+B} = e^{-\frac{[A,B]}{2}} e^{A} e^{B}$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a}}}$$

- Warum Verschieb. op.?

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\, \hat{a}\, \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha$$

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\, \hat{a}^+ D(\alpha) = \hat{a}^+ + \alpha^*$$

Unitäre Transform. mit $\hat{D}$ verschiebt $\hat{a}$ um α

$\Rightarrow$ verschiebt die Null-Lage des Osz.

- Warum wird $|\alpha\rangle$ <u>kohärenter Zustand</u> genannt?

$\hat{a}$ in Orts(q)-Darstellung $\quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\omega q + \hbar \frac{\partial}{\partial q}\right) \qquad p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}$

$$\hat{a}|0\rangle = 0$$

Dgl. für Vakuumzustand $\phi_0(q)$ in q-Darstellung:

$$\left(\omega q + \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)\phi_0(q) = 0$$

Osz.-grundzustand

Lösung: $\phi_0(q) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{\omega q^2}{2\hbar}}$

Wähle als Anfangsbed. ein verschobenes Vakuum:

$$t=0: \quad \psi_{\alpha_0}(t) = \langle q|\alpha_0\rangle = \langle q|\hat{D}(\alpha_0)|0\rangle$$

$$= e^{\frac{1}{4}(\alpha_0^{*2}-\alpha_0^2)}\, e^{i\frac{p_{\alpha_0}}{\hbar}}\, \phi_0(q-q_{\alpha_0})$$

$$q_\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\mathrm{Re}\,\alpha$$

$$p_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\,\mathrm{Im}\,\alpha$$

Zeitentwicklung:

$$\psi_\alpha(q,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\underbrace{\psi_{\alpha_0}(q)}_{\text{Anf. bed.}}, \qquad H|n\rangle = E_n|n\rangle = \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2})|n\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha_0|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0)^n}{\sqrt{n!}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hbar\omega(n+\frac{1}{2})t}\,\phi_n(q)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}\omega t}\, e^{-\frac{|\alpha_0|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0 e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}\,\phi_n(q)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}\omega t}\,\psi_{\alpha(t)}(q) \qquad \alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$$

$$|\psi_\alpha(q,t)|^2 = \left|e^{\frac{i}{\hbar}p_\alpha(t)q}\,\phi(q-q_{\alpha(t)})\right|^2$$

$$= |\phi(q-q_{\alpha(t)})|^2$$

$$= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{\omega}{\hbar}(q-q_{\alpha_0}\cos\omega t)^2}$$

Wellenpaket, das hin und her oszilliert, ohne seine Form zu ändern oder zu zerfliessen

$\Longrightarrow$ <u>kohärenter Zustand</u>