Quanten-Zeno-Effekt:

allgemeiner Effekt:

Wir interessieren uns für eine Messung $\hat{X}$ mit Eigenzuständen $|x_i\rangle\langle x_i|$ (Bsp. der Ort).

$$|\psi(t)\rangle = U(t,0)\,|\psi(0)\rangle = U(t,0)\,|x_0\rangle$$

System im Zustand $|x_0\rangle$ am Anfang

$$U(t,0) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = 1 - \frac{i}{\hbar}Ht + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 H^2 \frac{t^2}{2!}$$
$$= 1 - \frac{i}{\hbar}Ht - \frac{1}{\hbar^2}H^2\frac{t^2}{2}$$

$$\langle x_0|\psi(\tau)\rangle = \langle x_0|\,U(\tau,0)\,|x_0\rangle$$
$$= 1 - \frac{i}{\hbar}\langle x_0|H|x_0\rangle\tau - \frac{1}{\hbar^2}\langle x_0|H^2|x_0\rangle\frac{\tau^2}{2}$$

$$|\langle x_0|\psi(\tau)\rangle|^2 =$$
$$= \langle x_0|\psi(\tau)\rangle\langle\psi(\tau)|x_0\rangle$$
$$= \left(1 - \frac{i}{\hbar}\langle H\rangle\tau - \frac{1}{\hbar^2}\langle H^2\rangle\frac{\tau^2}{2}\right)\left(1 + \frac{i}{\hbar}\langle H\rangle\tau - \frac{1}{\hbar^2}\langle H^2\rangle\frac{\tau^2}{2}\right)$$

Entw. nur bis τ^2, also τ geeignet wählen

$$|\langle x_0|\psi(\tau)\rangle|^2 = 1 - \cancel{\frac{i}{\hbar}\langle H\rangle}\tau - \frac{1}{\hbar^2}\frac{\langle H^2\rangle}{2}\tau^2$$

$$+\frac{1}{\hbar^2}\langle H^2\rangle \tau^2 + \cancel{\frac{i}{\hbar}\langle H\rangle \tau}$$

$$+\frac{1}{\hbar^2}\langle H\rangle^2 \tau^2$$

$$= 1-\left(\frac{\tau}{\hbar}\right)^2 \underbrace{\left\{\langle H^2\rangle_0 - \langle H\rangle_0^2\right\}}_{=:\mathrm{Var}[H]_0}$$

$$P_N = \left(1-\frac{\tau^2}{\hbar^2}\mathrm{Var}[H]_0\right)^N$$

$$= \left(1-\frac{N^2\tau^2}{N^2}\frac{\mathrm{Var}[H]_0}{\hbar^2}\right)^N \qquad N\tau = T$$

$$= \left(1-\frac{T^2}{N^2}\frac{\mathrm{Var}[H]_0}{\hbar^2}\right)^N \xrightarrow{N\to\infty} 1$$

kann der Zustand sich nicht geändert haben!

Diskussion:

Durch die N-Messungen $[0,T]$ stören wir die Evolution des Systems und der Zustand, obwohl er sich ändern will, bleibt derselbe.

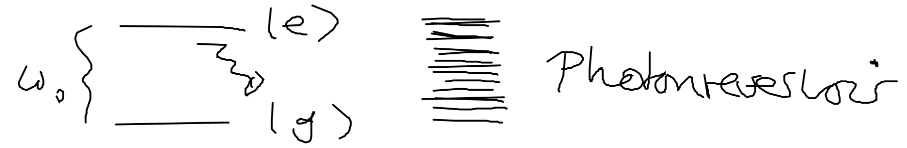
$\Rightarrow$ hier aber: Messungen haben einen Einfluss auf die Systemdynamik
(noch diskursiv nicht ob aber wie!)

ABER: Messungen finden aufgrund von Dissipation statt, hier wurde aber keine Dissipation zugrundegelegt.

Messtheorie kommt stets zu kurz (gefährliches Terrain)

• Problem: wenn direkt an ein Bad gekoppelt (Modenkontinuum) findet man kein $\tau = T/N$ so, dass Wechselwirkung vernachlässigbar wird.

→ das wird jetzt diskutiert

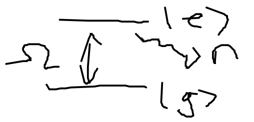


$$|\psi(0)\rangle = |e\rangle$$

$$H = d_0 \int d\omega \left\{ e^{i(\omega-\omega_0)t} b_\omega^\dagger |g\rangle\langle e| + h.c. \right\}$$

$$c_e(t) = c_e(0)\, e^{-\Gamma t}$$

$$|c_e(t)|^2 = e^{-2\Gamma t} \longrightarrow 0 \text{ kein Zeno}$$



(Mollow-Lösung)

nicht mehr lösbar im Schrödinger-Bild — Dichtematrix notwendig

Steady-State im ρ-Bild

$$\dot{\rho}_{ee} \equiv \{|\langle e|\psi\rangle|^2\} = -2\Gamma\rho_{ee} - 2\,\mathrm{Im}[\Omega\rho_{eg}]$$

$$\dot{\rho}_{eg} = -\Gamma\rho_{eg} + i\Omega(2\rho_{ee}-1)$$

$$t \to \infty \quad \dot{\rho}_{ij} = 0$$

$$\rho_{ee} = -\frac{1}{2\Gamma}\, 2\,\mathrm{Im}[\Omega\rho_{eg}]$$

$$\rho_{eg} = i\frac{\Omega}{\Gamma}(2\rho_{ee}-1)$$

$$\rho_{ee} = \frac{\Omega^2/\Gamma^2}{1+2\Omega^2/\Gamma^2} = \frac{\alpha}{1+2\alpha}$$

(i) $\Gamma \to 0$, d.h. $\alpha = \infty \to \rho_{ee} = \frac{1}{2}$

(ii) $\Gamma = \Omega$, $\alpha = 1$, $\rho_{ee} = \frac{1}{3}$

(iii) $\Gamma \to \infty$, $\rho_{ee} \longrightarrow \infty$, $\alpha \to 0$

kein Zeno? aber vielleicht braucht ρ_{ee} sehr lange, um Null zu werden

$$\rho_{ee}(t) = \frac{\Omega^2}{\Gamma^2+2\Omega^2}\left\{1-\left(\cos\mu t + \frac{3\Gamma}{4\mu}\sin\mu t\right)e^{-\frac{\Gamma}{4}3t}\right\}$$

$[\rho_{ee}(0)=1]$

$$+\, e^{-\frac{3}{4}\Gamma t}\left[\cos\mu t - \frac{\Gamma}{4\mu}\sin\mu t\right]$$

$$\mu = \sqrt{\Omega^2 - \frac{\Gamma^2}{16}}$$

$\Gamma \gg \Omega$, $\frac{\Gamma}{\Omega} \gg 1$ und $\frac{\Omega}{\Gamma} \ll 1$

$$\mu = i\frac{\Gamma}{4}$$

$$\rho_{ee}(t) = \frac{1}{\frac{\Gamma^2}{\Omega^2}+2}\left\{1-\left\{\cos\left(i\frac{\Gamma}{4}t\right)+\frac{3}{i}\sin\left(i\frac{\Gamma}{4}t\right)\right\}e^{-\frac{3}{4}\Gamma t}\right)$$

$$+\, e^{-\frac{3\Gamma}{4}t}\left\{\cos\left(i\frac{\Gamma}{4}t\right)-\frac{1}{i}\sin\left(i\frac{\Gamma}{4}t\right)\right)$$

$$\frac{1}{\frac{\Gamma^2}{\Omega^2}+2} \ll 1$$

$$\rho_{ee}(t) = \frac{e^{-\frac{3\Gamma}{4}t}}{2}\left\{e^{-\frac{\Gamma}{4}t} \cancel{+e^{\frac{\Gamma}{4}t}} + e^{-\frac{\Gamma}{4}t} \cancel{-e^{\frac{\Gamma}{4}t}}\right\}$$

$= e^{-\Gamma t}$ Zerfällt immer, kein Zeno, entspricht der Intuition!

Γ, Amplituden-Noise, wir können auch ein Phasen-Noise
$\to$ pure dephasing

$$\dot{\rho}_{ee} = 2\,\mathrm{Im}[\Omega\,\rho_{eg}(t)]$$

$$\dot{\rho}_{eg} = -\gamma\rho_{eg} - i\Omega(2\rho_{ee}-1)$$

$\gamma \gg \Gamma$

$\dot{\rho}_{eg}=0$: $\rho_{eg} \approx -\frac{i\Omega}{\gamma}(2\rho_{ee}-1)$

(keine Quantenkohärenzen)

$$\frac{\rho_{ee}(\Delta t) - \underbrace{\rho_{ee}(0)}_{=1}}{\Delta t} = -\frac{\Omega^2}{\gamma}\left(2\rho_{ee}(\Delta t)-1\right)$$

(Δt geeignet)

$$\rho_{ee}(\Delta t) = \left(\frac{\Omega^2}{\gamma}\Delta t+1\right)\left(1+\frac{2\Omega^2}{\gamma}\right)^{-1}$$

$$= 1-\frac{\Omega^2\Delta t}{\gamma+2\Omega^2\Delta t} = 1-\frac{\Omega}{\gamma}\frac{\Omega\Delta t}{1+2\frac{\Omega}{\gamma}\Delta t}$$

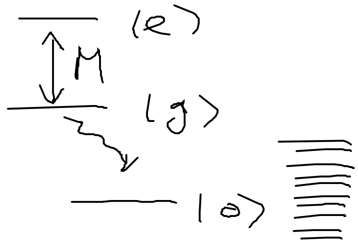
$$\frac{\Omega}{\gamma} \ll 1 \longrightarrow \rho_{ee}(\Delta t)=1$$

Voilà: Zeno-Effekt

(hat leider nichts mit Mess-prozessen)

im ZNS Messung stets Relaxation, und nicht assoziiert mit pure dephasing Prozess.

Beispiel:



$H = -M\left(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|\right)$

$$- g_0 \int d\omega \, \{ |g\rangle\langle 0, 1_\omega| \, e^{i(\omega-\omega_g)t} + h.c. \}$$

$$|\psi(t)\rangle = c_e |e\rangle + c_g |g\rangle + \int d\omega \, c_\omega |0, 1_\omega\rangle$$

$$\dot{c}_e = \langle e|\dot{\psi}\rangle = i M c_g$$

$$\dot{c}_g = i M c_e + i g_0 \int d\omega \, c_\omega(t) e^{i(\omega-\omega_g)t}$$

$$\dot{c}_\omega(t) = i g_0 c_g e^{-i(\omega-\omega_g)t}$$

$$\dots$$

$$\dot{c}_g = -K c_g(t) + i M c_e \quad , K = g_0^2 \pi$$

$$\dot{c}_e = i M c_g$$

Lösung im Laplace-Raum

$$c_e(0) = 1$$

$$c_e(t) = e^{-K/2 t} \{ \cos \bar{M} t + \frac{K}{2\bar{M}} \sin \bar{M} t \}$$

$$\bar{M} = \sqrt{M^2 - \frac{K^2}{4}}$$

Grenzfälle: $t \to 0 \quad c_e(0) = 1$

$K \to 0 \quad c_e(t) = \cos M t$

$K \gg M$:

$$\bar{M} = i\sqrt{\frac{K^2}{4} - M^2} \simeq i \frac{K}{2} \quad , \frac{K}{2\bar{M}} \simeq -i$$

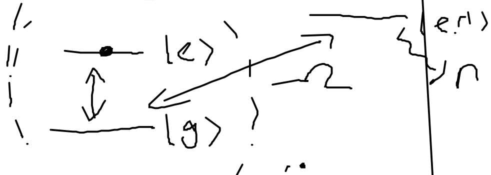
$$c_e(t) = e^{-K/2 t} \left\{ \frac{e^{i\bar{M}t}}{2} + \frac{e^{-i\bar{M}t}}{2} - i \sin i \frac{K}{2} t \right\}$$

$$= \frac{e^{-K/2 t}}{2} \left\{ \cancel{e^{-K/2 t}} + e^{K/2 t} \cancel{- e^{-K/2 t}} + e^{K/2 t} \right.$$

$= 1$

Nature 403, 269 (2000)
Myatt ... Wineland $\rightarrow$ nachgewiesen

$\Rightarrow$ falls der Verlust zu hoch ist, $\kappa \gg \Omega$, was einer Messung des Grundzustandes entspricht,



kann der Übergang von $|e\rangle - |g\rangle$ nicht stattfinden, so weit sogar, dass das ZNS nicht zerfällt

ABER: Quanten-Zeno existiert nicht allgemein, sondern nur für spezielle Systeme.