English Summary:

1. Dynamical systems and deterministic chaos

$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)}$ $\quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ dynamical variables

$\underline{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}^n$ vector field

$\phi : M \times \mathbb{R}_t \to M$ flow of the vector field $\underline{F}$

$\phi(\underline{x}_0, t) = \phi_t(\underline{x}_0) = \underline{x}(t; \underline{x}_0)$ ensemble of all trajectories

Stability of fixed point $\underline{x}^*$ $\quad (0 = \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}^*))$

$\delta\dot{\underline{x}} = (DF)_* \delta\underline{x}$ with Jacobian $(DF)_* \equiv A$, $\quad \delta\underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^*$

ansatz $\delta\underline{x} = \underline{\xi} e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda \underline{\xi} = A \underline{\xi} \Rightarrow$ eigenvalues λ_k

Beispiel für ein dynamisches System:

(ii) Ebenes Pendel mit Reibung

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{2\gamma\dot{\varphi}}_{\text{Reibung}} + \omega^2 \sin\varphi = 0$$

$x_1 = \varphi$

$x_2 = m l^2 \dot{\varphi}$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\left.\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{m l^2} \\ \dot{x}_2 &= -m g l \sin x_1 - 2\gamma x_2 \end{aligned}}\right\} \text{ Fixpkte. ungeändert}$$

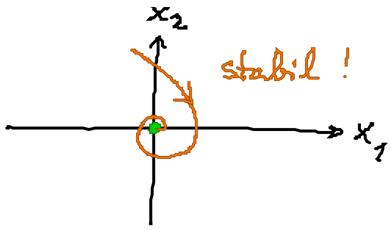
Linearisierung: $\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l \cos x_1 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$

a) $x_1 = x_2 = 0$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l & -2\gamma \end{pmatrix}$

Eigenwerte: $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega^2} = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ (schwache Reibung $\gamma^2 < \omega^2$)

(a_1) <u>gedämpfte Schwingungen</u>
(schwache Reibung)

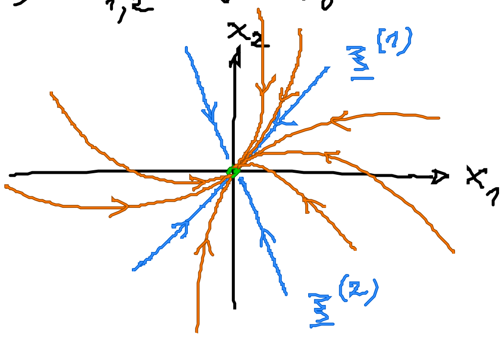


<u>stabiler Fokus</u>

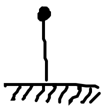
(a_2) <u>aperiodische gedämpfte Bewegung</u>
(überdämpfte Osz.)

starke Reibung $(\gamma^2 > \omega^2)$: $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$

<u>stabiler Knoten</u>



b) $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$

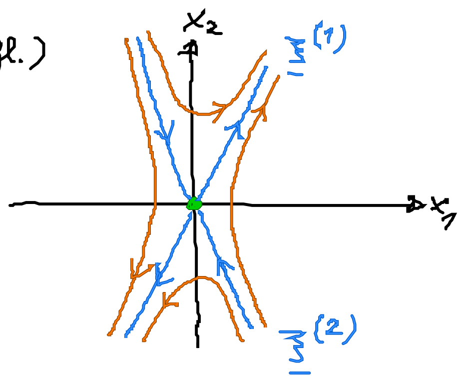


$\lambda^2 + 2\gamma\lambda - \omega^2 = 0$ (char. Gl.)

$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}_{> \gamma}$

$\lambda_1 > 0$ <u>instabil !</u>

$\lambda_2 < 0$



<u>Sattelpunkt</u>

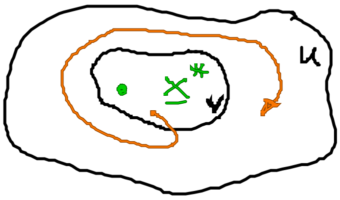
1.2 Stabilität und Langzeitverhalten

allg. Def. der Stabilität:

Sei $\underline{x}^*$ Fixp. des dynam. Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$

Def.: $\underline{x}^*$ heißt stabil (oder Lyapunov-stabil), wenn zu jeder Umgebung U von $\underline{x}^*$ eine Umgebung V um $\underline{x}^*$ existiert, so dass

$$\underline{x} \in V \quad \Rightarrow \quad \phi(\underline{x}, t) \in U \quad \forall t \geq 0$$

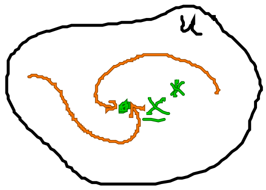


Def.: $\underline{x}^*$ heißt asymptotisch stabil, wenn zu $\underline{x}^*$ eine Umgebung U ex., so dass

$\phi(U, t_2) \subset \phi(U, t_1) \subset U$

für $0 < t_1 < t_2$ und

$\lim_{t \to \infty} \phi(\underline{x}, t) = \underline{x}^* \quad \forall \underline{x} \in U$



(U schrumpft mit wachsendem t auf $\underline{x}^*$ zusammen, d.h. Phasenraumvolumina schrumpfen)

Widerspruch

$\leftrightarrow$ Liouville'scher Satz für Hamilton'sche Systeme (konstantes Phasenraumvol.)

Def.: Ein dynamisches System heißt dissipativ, wenn Phasenraumvolumina schrumpfen (kontrahieren).

Kriterium für (Lyapunov-)Stabilität (lokal):

Wenn $\underline{x}^*$ stabil ist, dann hat keiner der Eigenwerte der Jacobi-Matrix $(DF)_{\underline{x}^*}$ einen pos. Realteil.

Beispiel: Fixpunkt a) ($\varphi=0$) des Pendels mit/ohne Reibung

Hinreichende Bed. für asymptot. Stabilität:

Alle Eigenwerte haben negative Realteile.

Beispiel: Fixpkt. a) des Pendels mit Reibung

Beispiel für Instab.: Fixpkt. b) ($\varphi = \pi$)

Allg. System mit $n=2$

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (A_{11}-\lambda)(A_{22}-\lambda) - A_{21}A_{12}$$
$$= A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} - \lambda(A_{11}+A_{22}) + \lambda^2 = 0$$

Eigenwerte aus der char. Gl.:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - \lambda \,\mathrm{tr} A + \det A = 0$$
$$= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$
$$= \lambda^2 - \lambda(\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\, A = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$\det A = \lambda_1\lambda_2$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr} A \pm \sqrt{(\mathrm{tr} A)^2 - 4\det A}\right)$$

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)_* = \mathrm{div}\, \underline{F}$$

Fallunterscheidung

(a) Stabiler Fokus (Strudelpunkt): $\det A > 0$, $\mathrm{tr}\, A < 0$

$(\mathrm{tr}\, A)^2 < 4 \det A$

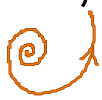
$\lambda_{1,2} = -\lambda_0 \pm i\omega$ $(\lambda_0, \omega > 0)$ gedämpfte Osz. im Phasenraum

elliipt. Spirale

(b) Instabiler Fokus: $\det A > 0$, $\mathrm{tr}\, A > 0$

$(\mathrm{tr} A)^2 < 4 \det A$

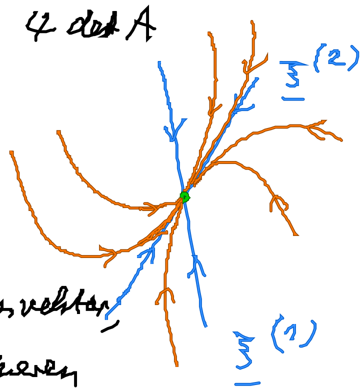
$\lambda_{1,2} = +\lambda_0 \pm i\omega$ $(\lambda_0, \omega > 0)$ entdämpfte Osz.



(c) stabiler Knoten: $\det A > 0$, $\mathrm{tr}\, A < 0$

$(\mathrm{tr}\, A)^2 > 4 \det A$

$\lambda_1 < 0$
$\lambda_2 < 0$ exp. Zerfall

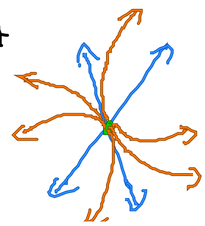


(fast alle Trajektorien nähern sich längs dem Eigenvektor, der zum betragsmäßig kleineren Eigenwert gehört)

(d) instabiler Knoten: $\det A > 0$, $\mathrm{tr}\, A > 0$

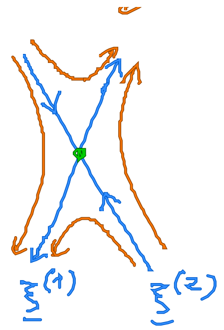
$(\mathrm{tr}\, A)^2 > 4 \det A$

$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{array}\right\} \in \mathbb{R}$ exp. Entdämpfung

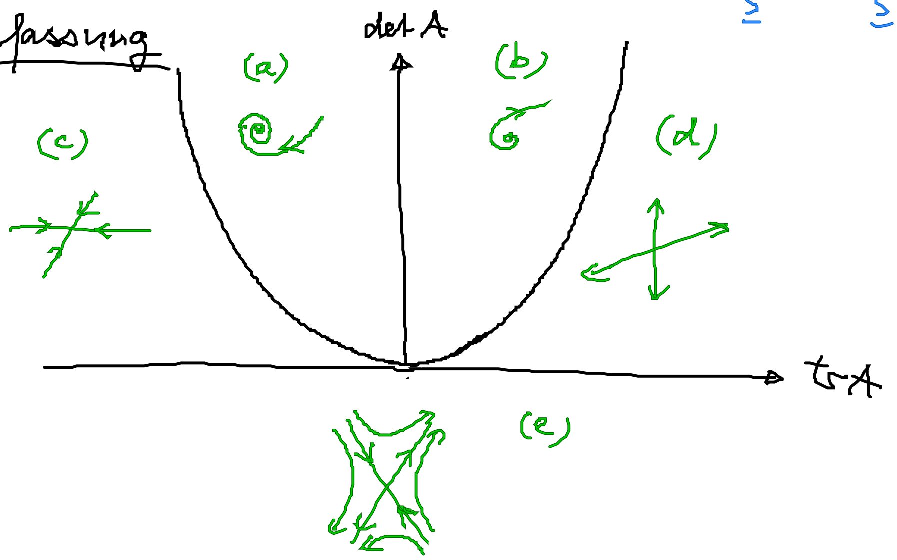


(e) <u>Sattelpunkt</u> : $\det A < 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{array}\right\} \in \mathbb{R}$$



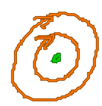
<u>Zus.fassung</u>



<u>Grenzen zwischen den 5 Bereichen</u> : entartete Fälle

- lin. Stab.analyse versagt, höhere Terme der Taylorentwicklung um Fixpkt. nötig.

  $\mathrm{tr}\, A = 0$, $\det A > 0$: entweder <u>Zentrum</u>

  ungedämpfte Osz.

  oder <u>schwach stabiler</u> / <u>instabiler Fokus</u>

- qualitative Änderungen im Verhalten des Flusses möglich

  (<u>Bifurkationen</u> = Verzweigungen der Lösungsmannigfaltigkeit)