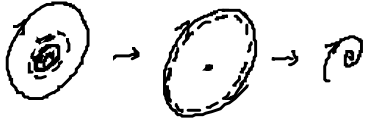


English Summary:

(C) Local bifurcations of limit cycles

(C1) Saddle-node bif. of LC



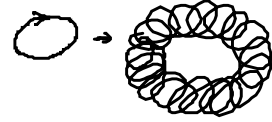
amplitude $\neq 0$
frequency $\neq 0$

(C2) Period doubling



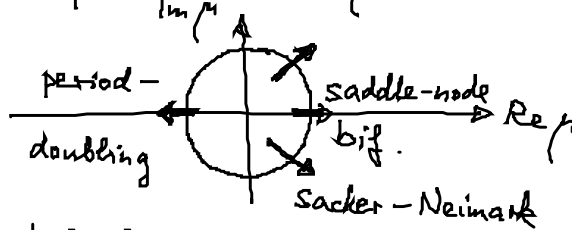
often cascade $2^n T$
period-doubling
route to chaos

(C3) Sacker-Neimark bif.



forms
non-commensurate
frequencies

Floquet multiplier $\mu = e^{\lambda T}$

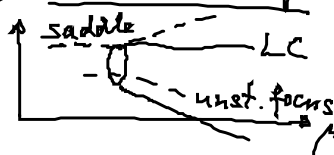


(D) global bif. of LC

(D1) SNIPER bif.



(D2) homoclinic bif.



ampl. $\neq 0$
frequ. $\rightarrow 0$

Einfaches generisches Modell für SNIPER-Bif.

(Ditzinger, Ning, Hn, Haken PRE 50, 3508 (94))

Hn, Ditzinger, Ning, Haken PRL 71, 87 (93)

Hizanidis, Anst, Schöll: Int. J. Bif. Chaos 18, 1759 (08)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x^2-y^2) + y(x-b) \\ \dot{y} &= y(1-x^2-y^2) - x(x-b) \end{aligned}$$

in Polarkoordinat. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1-r^2) \\ \dot{\varphi} &= b - r \cos \varphi \end{aligned} \quad b > 0 \quad \begin{pmatrix} \delta \dot{r} \\ \delta \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3r^2 & 0 \\ -\cos \varphi & r \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix}$$

Fixpunkte: $r=0$ (immer inst. Fokus, $\dot{\varphi}$)

$$r=1, b = \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \arccos b \quad (b < 1)$$

für $b > 1$: LC mit $r=1$, $\dot{\varphi} = b - \cos \varphi > 0 \quad \forall \varphi$

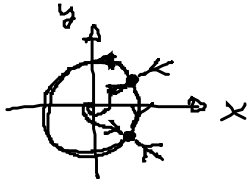
$$\frac{2\pi}{\sqrt{b^2-1}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{b - \cos \varphi} = \int_0^T dt = T$$

Bif. pkt.: $b=1 \Rightarrow T \rightarrow \infty$ (Frequ. $\rightarrow 0$)

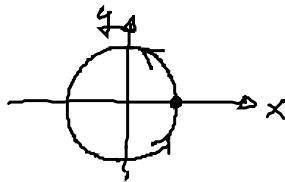
Fixpunkte auf dem Kreis $r=1$ ($b < 1$):

$$\begin{aligned} (x^*, y^*) &= (b, +\sqrt{1-b^2}) \text{ Sattelpkt. } (\Lambda = \begin{Bmatrix} -2 \\ \sqrt{1-b^2} \end{Bmatrix}) \\ &= (b, -\sqrt{1-b^2}) \text{ stab. Kn. } (\Lambda = \begin{Bmatrix} -2 \\ -\sqrt{1-b^2} \end{Bmatrix}) \end{aligned}$$

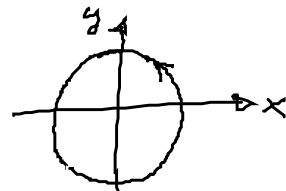
Sattel-Knoten-Bif.: $b=1$



$b < 1$



$b = 1$



$b > 1$

(E) Bifurkation von räumlichen Mustern

$$\dot{\underline{q}}(x,t) = \underline{F}(\underline{q}, \mu) + D \Delta \underline{q} \quad \text{Diff. konst. } D$$

lineare Stab. der Fixpunkte (räuml. homog.)

$$\underline{\delta q} \sim e^{\lambda t} e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}}$$

\Rightarrow Dispersionsrel. $\lambda(\underline{k})$

$\Rightarrow \text{Re } \lambda(\underline{k}) < 0$ stabil
 > 0 instabil

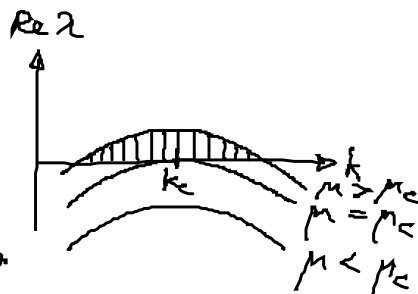
= 0 Bif. von räumlich-periodischen Lösungen mit Wellenvektor k

$$A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j}(q^*) - D_{ij} k^2$$

(E1) Turing - Instabilität

$$\lambda(k) = 0 \quad |k| = k_c \neq 0$$

stationäre, räumlich period. Strukturen mit k_c bifurkiert



(z.B. langsam diffundierender Aktivator u. schneller-Inhibitor)

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2$$

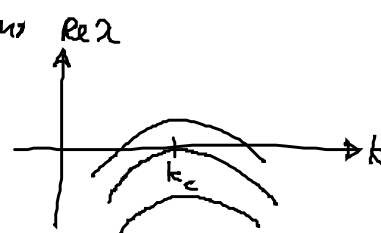
$$\epsilon = \frac{\mu - \mu_c}{\mu_c}$$

(E2) stehende / laufende Wellen

$$\lambda(k) = \pm i\omega \quad \text{bei } |k| = k_c \neq 0$$

oszillierende, räuml. period. Strukturen
 \rightarrow Wellen $\delta q \sim e^{i(kx \pm \omega t)}$

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2 \pm i\omega$$

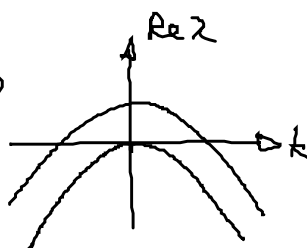


(E3) Hopf - Bifurkation

$$\lambda = \pm i\omega \quad \text{bei } |k| = k_c = 0$$

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2)^2 \pm i\omega$$

räuml. - homog. Grenzzyklus



1.4 Deterministisches Chaos

Deterministische, aber „ungeordnete“ Bewegung im Langzeitverhalten von Systemen mit $n \geq 3$ (autonom): seltsamer (chaotischer) Attraktor

Kriterien zur Klassifikation:

quasiperiod.	determinist. Chaos	stochastisch (Rauschen)
wenige dyn. Freiheitsgrade: niedrig-dim. Phasenraum		viele mikroskop. Freiheitsgrade (statist. Ensemble) $\approx 10^{24}$
Attraktor: Torus T^d mit $d=2,3,4,\dots$	seltener Attraktor mit fraktaler Dim	

Autokorrel. fkt. $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle$: $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$

period. in τ	$\rightarrow 0$ für $\tau \rightarrow \infty$	$= 0$ für $\tau \geq \tau_c$
-------------------	---	------------------------------

Fourierspektrum (bzw. spektrale Leistungsdichte $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau$)
power spectral density

diskrete Freqn. $\omega_1, \omega_2, \dots$	breites Frequenzband
--	----------------------

Instab. der Bewegung bei kleinen Störungen der Anfangsbed.
typ. universelle Bifurkationsszenarien

Def.: Eine Bewegung heißt chaotisch, wenn sie empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt.

Quantitative Formulierung der Stab. gegenüber kleinen

Variationen der Anfangsbed.:

Bahnstabilität (orbitale Stabilität)



bahnstabil
(alle benachbarten
Bahnen bleiben
in einer Röhre
um $\phi(t, x_0)$)



asymptot.
bahnstabil
(Abstand der benachbarten Bahnen $\rightarrow 0$
für $t \rightarrow \infty$)

asymptot. stabil:



für dasselbe t gilt $|\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \rightarrow 0$
 $t \rightarrow \infty$

Linearisierung in der Nähe der Lösungskurve $\phi(t, x_0)$:

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial x_k}}_{A_{ik}(t)}(x(t), t) \delta x_k$$

$A_{ik}(t)$: Eigenwerte $\lambda_k(t)$, Eigenvektoren $\underline{v}^{(k)}(t)$

formale Lösung: $\int_0^t dt' \underline{A}(t')$

$$\delta x(t) = e^{\int_0^t \underline{A}(t') dt'} \delta x(0)$$

zeitentw. einer infinites. Kugel um x_0

\rightarrow n -dim. Ellipsoid mit Hauptachsen $p_k(t) \approx p_k(0) e^{\bar{\lambda}_k t}$

Def.: Stab. ist bestimmt durch die Lyapunov-Expon.

$$\bar{\lambda}_k := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_k(t)}{p_k(0)}$$

NB: Führendes (größtes) Lyapunov-Exp.

$$\lambda := \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \ln |x(t) - y(t)|$$

$$\Rightarrow |\phi(t, x_0) - \phi(t, y_0)| \sim e^{\lambda t}$$

$\lambda < 0$: kleine Abweichungen der Aufh. bed. exponentiell gedämpft

$\lambda > 0$: expon. Auseinanderlaufen benachbarter Bahnen $\hat{=}$ Def. für Chaos

Chaotischer Attraktor im \mathbb{R}^3 : $\bar{\lambda}_1 > 0$, $\bar{\lambda}_2 = 0$, $\bar{\lambda}_3 < 0$



instab. Bew. auf dem Attraktor
goldstone Mode (invar. Manigf.)
Annäh. an den Attraktor