

English Summary

3. Time-delayed feedback control

3.1. Delayed complex systems (delay differential equations)

3.2.1 Stabilization of unstable fixed points

Normal form of unstable focus

$$\dot{z} = (\lambda \pm i\omega)z, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \lambda > 0$$

eigenvalues of fixed point $z^* = 0$

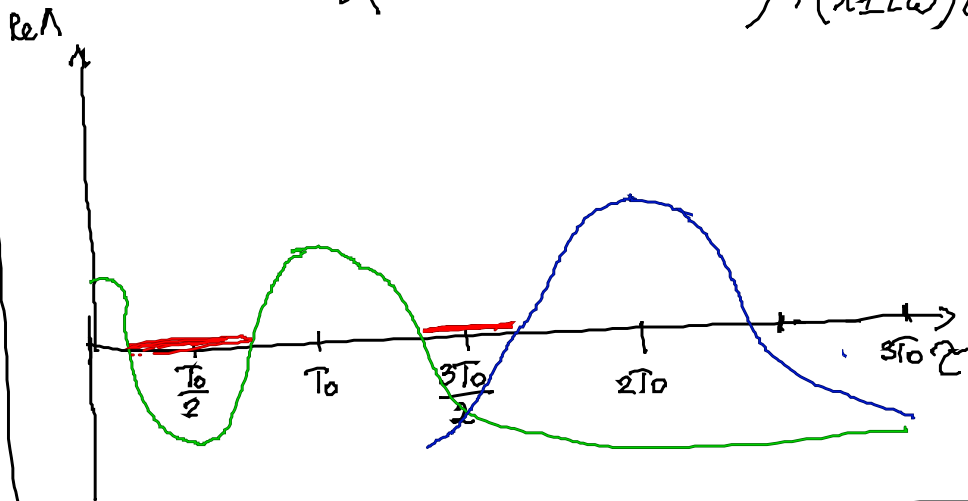
With time-delayed feedback control

$$\dot{z} = (\lambda \pm i\omega)z - k(z(t) - z(t-\tau))$$

$$\Rightarrow \text{char. eq. } (z \sim e^{\lambda t}): \quad \lambda + k(1 - e^{-\lambda\tau}) = \lambda \pm i\omega$$

Solution of $\tilde{z} e^{\tilde{z}} = y: \tilde{z} = W_l(y)$ Lambert function ($l \in \mathbb{Z}$)

$$\lambda\tau = W_l(k\tau e^{-(\lambda \pm i\omega)\tau + k\tau}) + (\lambda \pm i\omega)\tau - k\tau$$



Stabilisierung von instabilen Fixpunkten

$$\text{char. Gl.} \quad \lambda + k(1 - e^{-\lambda\tau}) = \lambda \pm i\omega$$

Stabilitätsgrenzen: $\text{Re } \Lambda = 0$
 Char. Gl. in Re und Im aufgespalten

$$\Lambda = p + iq$$

$$\lambda = p + k [1 - e^{-p\tau} \cos q\tau]$$

$$\omega = q + k e^{-p\tau} \sin q\tau \quad \lambda > 0$$

$$\text{Re } \Lambda = p \stackrel{!}{=} 0 \quad \lambda = k(1 - \cos q\tau) \quad (1)$$

$$\omega = q + k \sin q\tau \quad (2)$$

Systempar: λ, ω - gegeben

Kontrollpar: $k, \tau > 0$

Kurvenparam. der Stab. Grenze im (k, τ) -Raum

$$(1) \Rightarrow 0 \leq 1 - \cos q\tau \leq 2 \Rightarrow \frac{\lambda}{k} \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \geq \frac{\lambda}{2}$$

notwendige Bed. für Stabilisierung
 (minimale Rückkopplungsstärke)

$$k_{\min} = \frac{\lambda}{2} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \cos q\tau = -1 \Rightarrow q\tau = (2n+1)\pi \quad (3)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \sin q\tau = 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} q = \omega$$

$$\tau = \frac{\pi}{\omega} (2n+1) = T_0 \frac{2n+1}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Für $\tau = \frac{2\pi n}{\omega} = nT_0$ ist keine Stabilisierung

möglich, weil (1) $\frac{\kappa - \lambda}{\kappa} = \cos(\varphi\tau) \Big|_{\varphi\tau = 2\pi n} = 1$

$\Rightarrow 1 - \frac{\lambda}{\kappa} = 1 \quad \Leftarrow$

Analyt. Berechnung der Stabilitätsgrenze in der (κ, τ) -Ebene

(2)(2) $\Rightarrow \left(\frac{\kappa - \lambda}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\omega - \varphi}{\kappa}\right)^2 = \cos^2 \varphi\tau + \sin^2 \varphi\tau = 1$

$\Rightarrow \omega - \varphi = \pm \kappa \sqrt{1 - \left(\frac{\kappa - \lambda}{\kappa}\right)^2}$

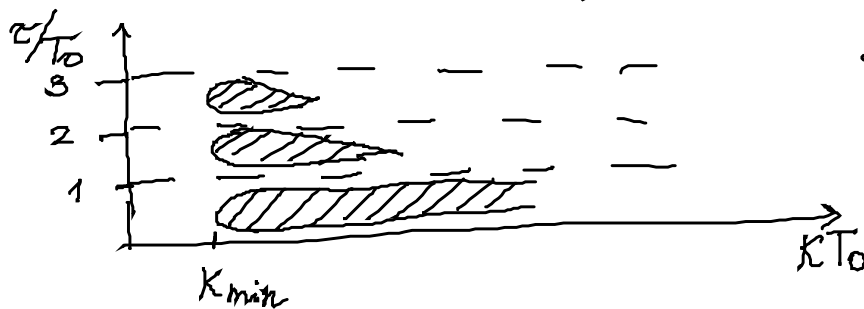
$\varphi = \omega \mp \sqrt{(2\kappa - \lambda)\lambda}$

fixe Par. λ, ω des unkontrollierten Systems

\Rightarrow Relation zwischen τ und κ aus (1):

$$\tau(\kappa) = \frac{\arccos \frac{\kappa - \lambda}{\kappa}}{\omega \mp \sqrt{(2\kappa - \lambda)\lambda}}$$

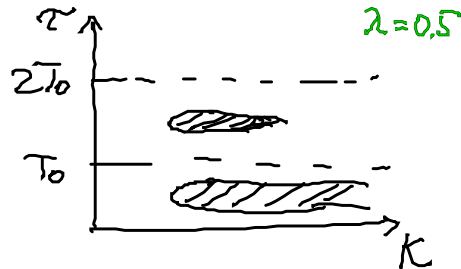
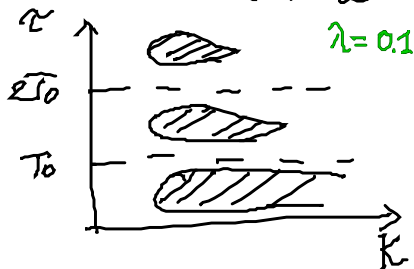
arccos hat mehrere Zweige:



Stabilisierung!

Hövel u. Schöll Phys. Rev. E 72, 0620 (2005)
 Stabilisierung für geeignete τ und K !

$$\tau = \frac{T_0}{2}, \frac{3}{2}T_0, \frac{5}{2}T_0, \dots$$



Latenzzeit δ :

$$\varphi(t-\delta) - \varphi(t-\delta-\tau)$$

Steigende Latenzzeiten reduzieren den Kontrollbereich!

Erweiterung (Socolar, Sukov, Gauthier, PRE 50, 3245 (1994))

- multiple-time feedback (ETDAS, extended time-delay autosynchronization)

$$K \sum_{n=0}^{\infty} R^n [x(t-n\tau) - x(t-(n-1)\tau)] \quad \text{Gedächtnisspur } R. \quad (0 \leq R < 1)$$

Eigenwertgl. $\frac{-\lambda\tau}{1-e^{-\lambda\tau}}$ $\lambda + K \frac{-\lambda\tau}{1-R e^{-\lambda\tau}} = \lambda \pm i\omega$	stab. Bereich vergrößert
---	-----------------------------

Dahms, Hövel, Schöll, PRE 76, 056201 (2007)

- Latenz-Effekte

$$K [x(t-\delta) - x(t-\delta-\tau)] \quad \text{Latenzzeit } \delta$$

Stab. Bereich verkleinert.

- Phasen-abhängige Rückkopplung $K e^{i\varphi}$

$$K \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) - x(t-\tau) \\ y(t) - y(t-\tau) \end{pmatrix}$$

- Asymptot. Stabilitätsverhalten für große τ

Yanchuk, Wolfrum, Hövel, Schöll, PRE 74, 026201 (2006)

Wolfrum et al. EPJ-ST 191, 91 (2010).

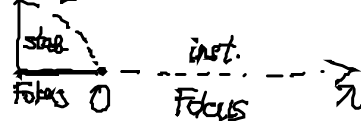
3.2.2. Stabilisierung instabiler periodischer Orbit

Normalform einer subkrit. Hopf-Bif.

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega + (1+i\gamma)|z|^2)z + b(z(t-\tau) - z(t))$$

$$\lambda < 0, \omega = 1, \gamma > 0, b = b_0 e^{i\phi} \in \mathbb{C}$$

ohne Kontrolle $r \uparrow$ instab. LC



$$z = r e^{i\phi} : \begin{aligned} \dot{r} &= (\lambda + r^2)r \\ \dot{\phi} &= \omega + \gamma r^2 \end{aligned}$$

LC: $r^2 = -\lambda$ ex. für $\lambda < 0$

$$\dot{\phi} = \omega - \gamma \lambda \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega - \gamma \lambda} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Periode des UPO} \\ \text{unstable periodic} \\ \text{orbit} \end{array} \right)$$

nichtinvasive Kontrolle ($\omega = 1$)

$$\text{wähle } \tau = nT = \frac{2\pi n}{\omega - \gamma \lambda}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Pythagoras-Kurve in der (τ, λ) -Ebene

Odd-number orbit (= ungerade Zahl von reellen Floquet-Exp > 0)

- Nakajima (1997): Stabilisierung von odd-numbered orbits durch zeitverzögerte Rückkopplung nicht möglich ("Odd-Number-Theorem")
- Fiedler, Flunkert, Georgi, Hövel, Schöll, PRL 98, 114101 (2007)
"Odd-Number-Theorem" gilt nicht!
Gegenbeispiel: Subkrit. Hopf-Bif. (Orbit ohne Torsion!)
Wähle α, β geeignet!
- Just et al. PRL 76, 026210 (2007)
- Fiedler, Yanchuk, Flunkert, Hövel, Wünsche, Schöll
PRE 77, 066207 (2008)
Sattel-Knoten Bif. von Grenzzyklen
- Kehrt et al. Eur. Phys. J. B 68, 55 (2009)
raum-zeit Muster
- Erzgräber, Just, Physica D 238, 1680 (2009)
- Brown, Poslethwaite, Silber, Physica D 240, 859 (2011)
- Flunkert, Schöll, PRE 84, 016214 (2011)
- Exp. mit el. Stromkreis:
Loewenich, Benner, Just, PRE 82, 036204, (2010)
- Laser exp.
Schikora, Wünsche, Henneberger, PRE 83, 026203 (2011)