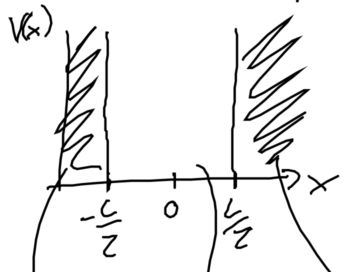
Unendl. hoher Potentialtopf



$$V(x) = \begin{cases} \infty & |x| > \frac{L}{2} \text{ , „außen"} \\ 0 & \text{, innen} \end{cases}$$

$V(-x) = V(x)$ Symmetrie

$\Rightarrow \varphi_{\text{außen}}(x) = 0$

gerade Lösungen: $\varphi_g(x) = \frac{A_g}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)$
$= \varphi_g(-x)$

ungerade " $\varphi_u(x) = -\varphi_u(-x) = \frac{A_u}{2}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right)$

$\hbar k = \sqrt{2mE}$, $E > 0$

Anschlussbedingungen! $\varphi_{\text{außen}}\left(\pm\frac{L}{2}\right) \overset{!}{=} \varphi_{\text{innen}}\left(\pm\frac{L}{2}\right)$

andernfalls wäre $\varphi'(x) = \frac{d\varphi}{dx}$ unendlich
$\Rightarrow$ Widerspruch zur Endlichkeit des Impulses
bzw. der kinet. Energie

$\Rightarrow$ Energie quantisiert !! (diskretes Spektrum)

$$E = E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2 n^2}{L^2} \qquad k = \frac{n\pi}{L}$$

mit $n = 1, 2, \ldots$

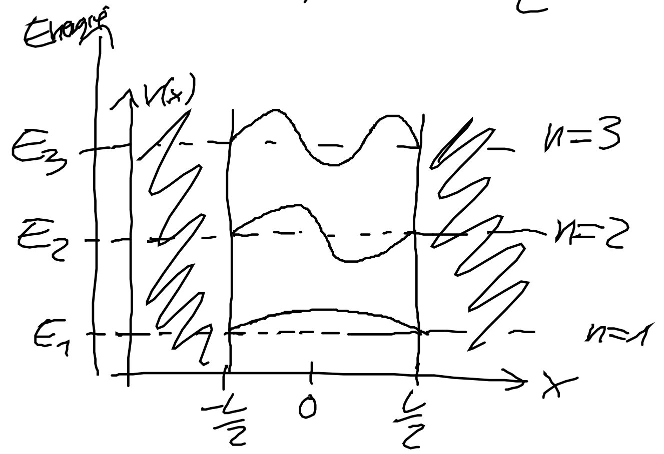
n gerade: Eigenfunktion ungerade $\underset{\sim}{u}$

$$\rightarrow \varphi(x) \sim \sin \frac{n\pi}{L} x$$

n ungerade: Eigenfunktion gerade

$$\varphi(x) \sim \cos \frac{n\pi}{L} x$$

Skizze:



Bemerkungen zu den Energieeigenwerten

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \ldots$$

d.h. $n \neq 0$, es gibt also keinen Zustand mit verschwindender kinetischer Energie!

Hintergrund: Heisenberg'sche Unschärferelation

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

benutze dies, um den minimalen Impuls abzuschätzen

$$\Delta x \, \Delta p \overset{\text{minimal}}{=} \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta p = \frac{\hbar}{2 \Delta x}$$

$$p_{min} = \frac{\hbar}{2 \Delta x_{maximal}}$$

hier: $\Delta x_{maximal} = L \mathrel{\hat{=}}$ Breite des Kastens

$$p_{min} = \frac{\hbar}{2L} > 0$$

Anders ausgedrückt: Dadurch, dass das Teilchen im Kasten "lokalisiert" ist, ergibt sich $\Delta x < \infty$

$\Rightarrow p$ kann nicht Null sein

$$\Rightarrow E_{n=1} > 0$$

Grundzustandsenergie

- Abstand zweier benachbarter Energiewerte (d.h. zweier k-Werte) ist gegeben durch $\Delta k = \frac{\pi}{L}$

$$\boxed{k = \frac{n\pi}{L}}$$

d.h. $\Delta k \to 0$ für $L \to \infty$ „unendlich breiter Topf"

Dann wird das Energiespektrum kontinuierlich!

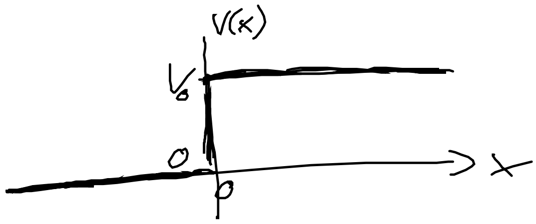
$\hat{=}$ Fall des freien Teilchens

- Zur Normierung der Wellenfunktion im Kasten

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx\, |\varphi_g(x)|^2 = \int_{-L/2}^{L/2} dx\, |\varphi_u(x)|^2 \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow A_g = A_u = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

II.7.3. Potentialschwelle



mit V_0 endlich

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V(x)\varphi(x) = E\,\varphi(x)$$

$$\Rightarrow \varphi_\pm(x) = A_\pm\, e^{\pm \lambda x} \quad \text{mit } \hbar\lambda = \sqrt{2m(E-V)}$$

rechts: $V = V_0$, $x > 0$
links: $V = 0$, $x < 0$

Fallunterscheidung notwendig!

a) $E > V_0$ „oszillatorische Lösungen" (ähnlich wie im freien Fall

b) $E < V_0$, aber $E > 0$ $\quad (0 < E < V_0)$

$\Rightarrow \hbar\lambda$ ist reell mit $\hbar\lambda = \sqrt{2m(V_0 - E)}$

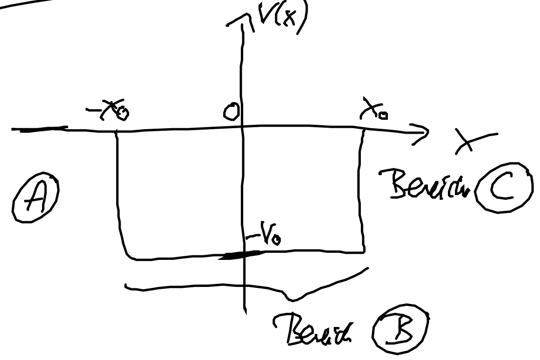
$\Rightarrow$ Lösungen der Form $e^{-\lambda x}$, $x > 0$

$e^{\lambda x}$, $x < 0$

verschwinden für $x \to \pm\infty$
exponentiell abfallend!!

Genaueres siehe Übung!!

II.7.4. Endlich tiefer Potentialtopf



$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & |x| < x_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

endlich

Diskutiere werden 2 Fälle
a) $-V_0 < E < 0$ „gebundene Zustände"
b) $E > 0$ „Streuzustände"

a) Bereich B

Ansatz: $\varphi(x) = B_+ e^{ikx} + B_- e^{-ikx}$

mit $\hbar k = \underbrace{\sqrt{2m(V_0 - E)}}_{>0}$

$\to$ klassisch erlaubtes Gebiet

Bereich A

$$\varphi(x) = A\, e^{\lambda x} \quad \text{mit} \quad \hbar\lambda = \sqrt{2m|E|}$$

verschwindet für $x \to -\infty$

Bereich C

$$\varphi(x) = C\, e^{-\lambda x} \quad \text{mit} \quad \hbar\lambda\ \sqrt{2m|E|}$$

klassisch verbotene Lösungen

Festlegung der Konstanten

i) Fordere Stetigkeit von $\varphi(x)$ an den „Nahtstellen" $x = \pm x_0$

ii) Fordere außerdem die Stetigkeit von $\varphi'(x) = \frac{d\varphi}{dx}$!

Grund für ii):

$$SG: \ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \left(E - V(x)\right)\varphi(x)$$

Falls also $V(x)$ keine unendlich hohen Sprünge aufweist, dann ist $\varphi''(x) = \frac{d^2\varphi}{dx}$ endlich

$\Rightarrow \varphi'(x)$ ist stetig

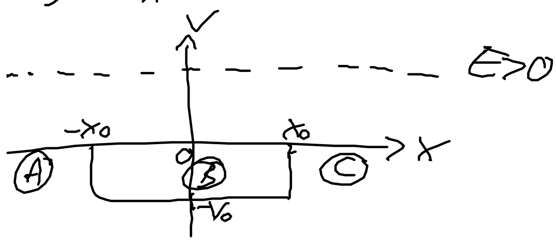
Schreibe i) und ii) für $x = \pm x_0$ auf

$\Rightarrow$ vier Gleichungen für die vier Unbekannten A, B_+, B_-, C

Es ergibt sich:

- Man hat wieder Eigenfunktionen mit gerader und ungerader Parität
- Energiespektrum ist diskret, aber mit anderen Bestimmungsgleichungen für k, λ (im Vergleich zum ∞ hohen Topf)

b) Streuzustände beim endlich tiefen Topf



Klassisch: Das Teilchen kann zu beiden Seiten ins Unendliche laufen!

qm: Wellenfunktionen überall oszillatorisch, wobei die Wellenlänge vom Bereich abhängen!

Ansätze:

Bereich (A):
$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_R(x)$$

mit $\varphi_0(x) = e^{ik_0 x}$, $\hbar k_0 = \sqrt{2mE}$

„einkommende Welle" (einfallende)

Amplitude wurde o.B.d.A. auf eins gesetzt und $\varphi_r(x) = A\, e^{-ik_0 x}$

reflektierte Welle

(typisches quantenmechan. Phänomen)

B : $\varphi(x) = B_+ e^{ikx} + B_- e^{-ikx}$

mit $\hbar k = \sqrt{2m(E+V_0)}$

C : $\varphi(x) = C\, e^{ik_0 x}$ mit $\hbar k_0 = \sqrt{2mE}$

$= \varphi_d(x)$

durchgehende (transmittierte) Welle

Festlegung der Konstanten wie gehabt (φ, φ' stetig)

Man findet:

Für jedes $E > 0$ ergibt sich eine Lösung für die Koeffizienten

$\Rightarrow$ Eigenwertspektrum ist kontinuierlich

Streuzustände werden häufig über die entsprechende Wahrscheinlichkeitsströme diskutiert

Erinnerung (Kap II.3)

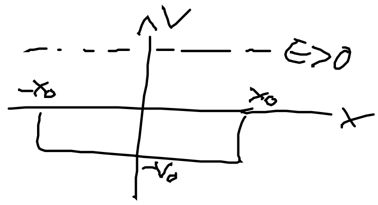
Kontinuitätsgleichung: $\Longrightarrow$ $\underbrace{\underline{j}(\underline{r},t)}_{\text{Stromdichte}} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla \psi^*\right)$

mit $\psi = \psi(\underline{r},t)$

hier $\psi(\underline{r},t) = \varphi(\underline{r})\, \chi(t)$, $\quad \chi(t) \sim e^{-i\omega t}$ $\qquad \omega = \frac{E}{\hbar}$

$\Rightarrow$ Zur Berechnung von $\underline{j}$ langt $\varphi(\underline{r})$ aus!

Streuung am Potentialtopf



- Strom im Bereich (A)

$$\boxed{\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_r(x)}$$

einfallender Strom:

$$j_0 = \frac{\hbar}{2mi}\left(\varphi_0^* \frac{d\varphi_0}{dx} - \varphi_0 \frac{d\varphi_0^*}{dx}\right)$$

Anteil aus der einfallende Welle

$$j_0 = \ldots = \frac{\hbar k_0}{m}$$

„reflektierter Strom":

$$j_r = \frac{\hbar}{2mi}\left(\varphi_r^* \frac{d\varphi_r}{dx} - \varphi_r \frac{d\varphi_r^*}{dx}\right)$$

$$= \ldots = -\frac{\hbar k_0}{m} |A|^2$$

A: Amplitude der reflektierte Welle

- Strom im Bereich (C) „transmittierter Strom"

$$j_d = \frac{\hbar k_0}{m} |C|^2$$

Man definiert

Transmissionskoeffizienten

$$T = \left| \frac{j_d}{j_0} \right|$$

Reflexionskoeffizient

$$R = \left| \frac{j_r}{j_0} \right|$$

Bemerk: Aus der Teilchenzahlerhaltung folgt

$$\boxed{T + R = 1}$$

Speziell hier:

$$T = |C|^2 \quad , \; R = |A|^2$$

Man findet

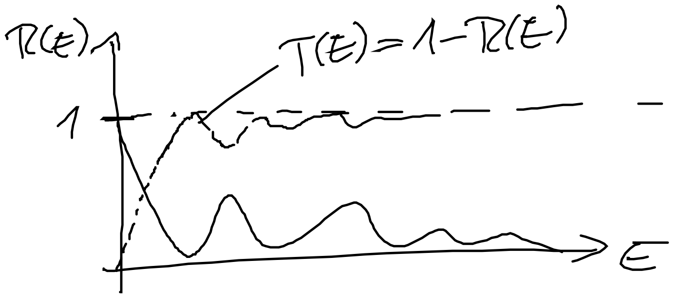
$$R = R(E) = \frac{4\left(1 - (k/k_0)^2\right)^2 \sin^2 k x_0}{\alpha^2}$$

$$\text{mit} \quad k/k_0 = \sqrt{\frac{E + V_0}{E}}$$

$$\alpha = \alpha(k, k_0, x_0)$$ halbe Topfbreite

Also $R \neq 0$

Teilchenwelle "erleidet" Reflexion am Potentialtopf !!
(unerwartet aus klass. Sicht!)

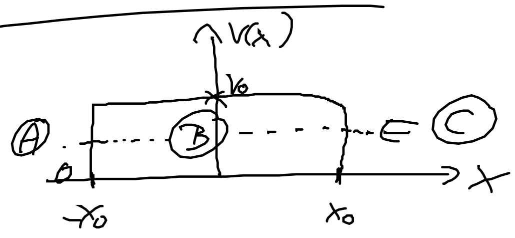


oszillatorisches Verhalten

Wellenlänge bedingt durch den ψ

Für $E \to \infty$ ergibt sich $R(E) \to 0$
plausibel, da das Teilchen den Topf dann nicht mehr spürt!

II.7.5 Tunneleffekt



V_0 endlich

"Dünne" Potentialwälle können "durchtunnelt" werden

betrachte $0 < E < V_0$

Ⓐ : $\underbrace{e^{ikx}}_{\text{einfallend}} + \underbrace{A e^{-ikx}}_{\text{reflektiert}}$ $\qquad \hbar k = \sqrt{2mE}$

③ $\varphi(x) = B_+ e^{\lambda x} + B_- e^{-\lambda x}$ $\quad$ $\hbar\lambda = \sqrt{2m\underbrace{(V_0 - E)}_{>0}}$

Ⓒ $C e^{ik_0 x}$

Es ergibt sich:

$$T(E) = \frac{4\chi^2}{4\chi^2 + (1+\chi^2)^2 \sinh^2 2\lambda x_0} \quad \text{mit } \chi = \frac{\lambda}{k_0} = \sqrt{\underbrace{\frac{V_0 - E}{E}}_{>0}}$$

$$R(E) = 1 - T(E)$$

Also $T > 0$, d.h. der Tunnelstrom ist ungleich Null!

Grenzwertbetrachtung:

$$\lambda x_0 \gg 1 \quad , \quad \lambda x_0 = \frac{x_0}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}$$

(das bedeutet: • sehr hoher Potentialwall im Vergleich zur Einfallsenergie ($V_0 - E$ groß)

• sehr breiter Potentialwall x_0 groß

$$\sinh^2(2\lambda x_0) \approx \frac{1}{4} e^{4\lambda x_0}$$

$$\Rightarrow T(E) \sim e^{-\frac{4}{\hbar} x_0 \sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

T nimmt also exponentiell ab mit der Breite des Walls ($\sim x_0$) und der Wurzel der effektiven Energiebarriere ($\sim\sqrt{U_0 - E}$)

Physikalische Relevanz

z.B. α-Zerfall (Kernphysik):

Potentialwall aus Coulombabstossung + ~~Kernpote~~ Kernpotential

Z-fach positiv ~~gla~~ geladenes Teilchen