Wh:

Heisenbergbild der Dynamik

$$|\psi_H(t)\rangle \overset{!}{=} |\psi_H\rangle = \underbrace{|\psi(t_0)\rangle}_{\text{Schrödinger-Zustand}}$$

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^+(t,t_0)\,\hat{A}\,\hat{U}(t,t_0) \Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_H(t)$$

Dirac-Bild: $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t)$

$$|\psi_D(t)\rangle = \hat{U}_0(t_0,t)\,\underbrace{|\psi(t)\rangle}_{\text{Schrödinger}}$$

mit $\hat{U}_0(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(t-t_0)}$

$= \hat{U}_0^+(t_0,t)$

$$\hat{A}_D(t) = \hat{U}_0(t,t_0)\,\hat{A}\,\hat{U}_0(t,t_0)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_D(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_D(t), \hat{H}_0\right] + \frac{\partial \hat{A}_D(t)}{\partial t}$$

und $i\hbar\,|\dot{\psi}_D(t)\rangle = \hat{H}_{1,D}(t)\,|\psi_D(t)\rangle$

sieht formal wie die SG aus!

aber: Die Dynamik der Zustände im Dirac-Bild ist durch den (Wechselwirkungs-) Anteil $H_1(t)$ des vollen Hamiltonian bestimmt!

VI. Quantentheorie des Drehimpulses

VI.1. Der Drehimpulsoperator

Klass. Drehimpuls:

$$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$$

Übergang zur QM durch Korrespondenzprinzip

$$\underline{r} \longrightarrow \hat{\underline{r}} \ , \ \underline{p} \longrightarrow \hat{\underline{p}}$$

$\Rightarrow \quad \hat{\underline{L}} = \hat{\underline{r}} \times \hat{\underline{p}}$ „Bahn-Drehimpulsoperator"

Zusatz ist wichtig, da man später auch einen Spin-Drehimpuls einführt!

Eigenschaften

i) $\hat{\underline{L}}$ ist hermitesch

denn z.B. $\hat{L}_x^+ = (\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y)^+$

$$= \hat{p}_z^+ \hat{y}^+ - \hat{p}_y^+ \hat{z}^+$$

$$= \hat{p}_z \hat{y} - \hat{p}_y \hat{z}$$

Komponenten von $\hat{\underline{p}}, \hat{\underline{r}}$ sind hermitesch!

$$= \hat{y}\hat{p}_z - \underbrace{\hat{p}_y \hat{z}}_{\hat{z}\hat{p}_y} = \hat{L}_x$$

betrachtete Komponenten vertauschen ($[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\, \delta_{ij}$)

ii) Vertauschungsrelationen

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$$

Komponenten von $\hat{\underline{L}}$ vertauschen nicht

allgemein:

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \hat{L}_k \quad \text{mit } i,j,k \text{ zyklische Indizes}$$

Bem: Ganz generell heißen Operatoren mit solchen Vertauschungsrelationen „Drehimpulsoperatoren". Insbesondere genügt der Spin analoge Relationen!

Folgerung: Zwei Drehimpulskomponenten können keine gemeinsamen Eigenzustände haben und sind gleichzeitig nicht scharf messbar!

aber: $[\hat{\underline{L}}^2, \hat{L}_i] = 0 \qquad i = x, y, z$

$\rightarrow [\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \hat{L}_i] = \ldots = 0$

$\Rightarrow$ $\hat{\underline{L}}^2$ und eine Komponente $\hat{L}_i$ besitzen also ein gemeinsames System von Eigenzuständen!

typischerweise betrachtet man zusammen mit $\hat{\underline{L}}^2$ die z-Komponente $\hat{L}_z$

Motivation für die Betrachtung des Problems der Eigenzustände:
Relevant für zentralsymmetrische Probleme!
da $[\hat{H}, \hat{\underline{L}}^2] = 0$, $[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$ und $[\hat{\underline{L}}^2, \hat{L}_z] = 0$
$\Rightarrow$ $\hat{H}, \hat{\underline{L}}^2, \hat{L}_z$ ~~die~~ haben dieselbe Eigenzustände!

iii) Zur eigentlichen Lösung des Eigenwertproblems (von $\hat{\underline{L}}^2$ und $\hat{L}_z$) des Drehimpulsoperators benutzt man „Leiteroperatoren"

(wie beim harmonischen Oszillator)

definiere:

$$\hat{L}_+ := \hat{L}_x + i\hat{L}_y \qquad \text{Aufsteigeoperator}$$

$$\hat{L}_- := \hat{L}_x - i\hat{L}_y \qquad \text{Absteigeoperator}$$

da wir die gemeinsamen Eigenzustände von $\hat{\underline{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ suchen!

es gilt: $\hat{L}_+^+ = \hat{L}_x^+ + (i\hat{L}_y)^+ = \hat{L}_x^+ - i\hat{L}_y^+$

$$= \hat{L}_x - i\hat{L}_y = \hat{L}_-$$

$$\hat{L}_-^+ = \dots \hat{L}_+$$

Leiteroperatoren sind nicht hermitesch!

Außerdem:

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = [\hat{L}_x + i\hat{L}_y, \hat{L}_x - i\hat{L}_y] = \dots = 2\hbar \hat{L}_z$$

und:

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = [\hat{L}_z, \hat{L}_x] \pm i[\hat{L}_z, \hat{L}_y]$$

$$= i\hbar\hat{L}_y \pm i(-i\hbar\hat{L}_x) = i\hbar\hat{L}_y \pm \hbar\hat{L}_x$$

$$= \pm\hbar\hat{L}_\pm$$

$$[\hat{\underline{L}}^2, \hat{L}_\pm] = 0$$

(da $\hat{\underline{L}}^2$ ja mit jeder Komponente von $\hat{\underline{L}}$ vertauscht $[\hat{\underline{L}}^2, \hat{L}_i] = 0$)

VI.2. Das Eigenwertproblem des Drehimpulses

Ausgangspunkt:
$[\hat{\underline{L}}^2, \hat{L}_z] = 0 \implies$ suche gemeinsame Eigenzustände von $\hat{\underline{L}}^2$ und $\hat{L}_z$!

Schreibe:
$$\hat{\underline{L}}^2 |\alpha,\beta\rangle = \alpha |\alpha,\beta\rangle$$
$$\hat{L}_z |\alpha,\beta\rangle = \beta |\alpha,\beta\rangle$$
Eigenwerte

Dabei sind die $|\alpha,\beta\rangle$ normierte Eigenzustände
$$\langle\alpha',\beta'|\alpha,\beta\rangle = \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}!$$

Charakterisieren die Eigenzustände durch <u>zwei</u> Quantenzahlen α,β

(ausgehend von der Annahme, dass $\hat{\underline{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ hier den maximalen Satz verträglicher Observablen darstellen !)

Eine erste Aussage zu den α,β kann man sofort machen
$\hat{\underline{L}}$ hermitesch $\rightarrow$ $\hat{\underline{L}}^2$ hermitesch

$$\implies \alpha = \langle\alpha,\beta|\hat{\underline{L}}^2|\alpha,\beta\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \langle\alpha,\beta|\underbrace{\hat{L}_i^2}_{\hat{L}_i\hat{L}_i = \hat{L}_i^+\hat{L}_i}|\alpha,\beta\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\underbrace{\langle \hat{L}_i \alpha,\beta |}_{\langle \phi |} \underbrace{\hat{L}_i |\alpha,\beta\rangle}_{|\phi\rangle}}_{\text{Norm!! } \geq 0 \text{ positiv !!}}$$

$$\geq \langle \alpha,\beta | \hat{L}_z^2 |\alpha,\beta\rangle = \beta^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \geq \beta^2 \geq 0} \Leftrightarrow -\sqrt{\alpha} \leq \beta \leq \sqrt{\alpha}$$

Weiteres Vorgehen ähnlich wie beim harmon. Oszillator

Behauptung:

Mit $|\alpha,\beta\rangle$ sind auch die Zustände $\hat{L}_{\pm}|\alpha,\beta\rangle$ Eigenzustände zu $\hat{\underline{L}}^2$ und $\hat{L}_z$!

denn:

$$[\hat{\underline{L}}^2, \hat{L}_{\pm}] = 0$$

- $$\hat{\underline{L}}^2 \left(\hat{L}_{\pm}|\alpha,\beta\rangle\right) = \hat{L}_{\pm} \hat{\underline{L}}^2 |\alpha,\beta\rangle = \hat{L}_{\pm}\left(\alpha|\alpha,\beta\rangle\right) = \alpha\left(\hat{L}_{\pm}|\alpha,\beta\rangle\right)$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar \hat{L}_\pm$$

- $\hat{L}_z \left(\hat{L}_\pm |\alpha, \beta\rangle \right) = \left(\hat{L}_\pm \hat{L}_z \pm \hbar \hat{L}_\pm \right) |\alpha, \beta\rangle$

$$= \beta \hat{L}_\pm |\alpha, \beta\rangle \pm \hbar \hat{L}_\pm |\alpha, \beta\rangle$$

$$= (\beta \pm \hbar) \left(\hat{L}_\pm |\alpha, \beta\rangle \right)$$

$\Longrightarrow$ Die Anwendung von $\hat{L}_\pm$ auf $|\alpha, \beta\rangle$ ergibt wieder einen Eigenzustand.

Der entsprechende Eigenwert von $\hat{L}_z$ erhöht sich um $\hbar$ (erniedrigt)

Dagegen bleibt der Eigenwert von $\hat{\underline{L}}^2$ unverändert!

Beachte jedoch:

wegen $-\sqrt{\alpha} \leq \beta \leq \sqrt{\alpha}$ muß es einen größten bzw. kleinsten Eigenwert β_{max} bzw. β_{min} geben, für den gilt:

$$\hat{L}_+ |\alpha, \beta_{max}\rangle = 0$$

$$\hat{L}_- |\alpha, \beta_{min}\rangle = 0$$

zu festem α

Folgerungen:

Einsetzen der Def. von $\hat{L}_-, \hat{L}_+$

Kommutator

$$\hat{L}_- \underbrace{\hat{L}_+ |\alpha, \beta_{max}\rangle}_{0} = 0 = \left(\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + i\hat{L}_x\hat{L}_y - i\hat{L}_y\hat{L}_x \right) |\alpha, \beta_{max}\rangle$$

$$= \left(\hat{\underline{L}}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar \hat{L}_z \right) |\alpha, \beta_{max}\rangle$$

$$= \left(\alpha - \beta_{max}^2 - \hbar \beta_{max} \right) |\alpha, \beta_{max}\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \stackrel{!}{=} \beta_{max}^2 + \hbar\beta_{max}} \quad (1)$$

und

$$\hat{L}_+ \underbrace{\hat{L}_- |\alpha, \beta_{min}\rangle}_{0} = 0 = (\hat{\underline{L}}^2 - \hat{L}_z^2 + \hbar \hat{L}_z)|\alpha, \beta_{min}\rangle$$

$$= (\alpha - \beta_{min}^2 + \hbar\beta_{min})|\alpha, \beta_{min}\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \beta_{min}^2 - \hbar\beta_{min}} \quad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) legen β_{max} und β_{min} für festes α eindeutig fest!

Die Relation zwischen β_{max} und β_{min} findet man durch Verwendung des Kommutators $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm^n] = \pm n\hbar \hat{L}_\pm^n$

mit $n \in \mathbb{N}_0$

(hier ohne Beweis)

$$\Rightarrow \hat{L}_z \hat{L}_\pm^n |\alpha, \beta\rangle = (\hat{L}_\pm^n \hat{L}_z \pm n\hbar \hat{L}_\pm^n)|\alpha, \beta\rangle$$

$$= (\beta \pm n\hbar)(\hat{L}_\pm^n |\alpha, \beta\rangle)$$

d.h. $\hat{L}_\pm^n |\alpha, \beta\rangle$ ist wieder Eigenzustand!

$\Rightarrow$ Es muß ein $n \in \mathbb{N}_0$ geben mit

$$|\alpha, \beta_{max}\rangle \overset{!}{=} \left(\hat{L}_+\right)^n |\alpha, \beta_{min}\rangle \qquad \text{Forderung}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{L}_z |\alpha, \beta_{max}\rangle \overset{!}{=} \hat{L}_z \left(\hat{L}_+\right)^n |\alpha, \beta_{min}\rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta_{max} |\alpha, \beta_{max}\rangle = \left(\hat{L}_+^n \hat{L}_z + n\hbar\, \hat{L}_+^n\right) |\alpha, \beta_{min}\rangle$$

$$= \left(\beta_{min} + n\hbar\right) \hat{L}_+^n |\alpha, \beta_{min}\rangle$$

$$= \left(\beta_{min} + n\hbar\right) |\alpha, \beta_{min}\rangle$$

$$(*) \quad \boxed{\beta_{max} = \beta_{min} + n\hbar} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0$$

Kombiniere

$$① : \alpha = \beta_{max}^2 + \hbar \beta_{max}$$

$$② : \alpha = \beta_{min}^2 - \hbar \beta_{min}$$

$$① = ②$$

$$\underbrace{\beta_{max}^2}_{(*)} + \hbar \underbrace{\beta_{max}}_{(*)} = \beta_{min}^2 - \hbar \beta_{min}$$

$$\cancel{\beta_{min}^2} + 2n\hbar \beta_{min} + n^2\hbar^2 + \hbar \beta_{min} + n\hbar^2 = \cancel{\beta_{min}^2} - \hbar \beta_{min}$$

$$\beta_{min} \left(2n\hbar + \hbar + \hbar\right) = -\hbar^2 \left(n^2 + n\right)$$

$$\beta_{min}\, 2\hbar (n+1) = -\hbar^2 n (n+1)$$

$$\Rightarrow \beta_{min} = \frac{-n\cancel{(n+1)}\hbar^2}{2\cancel{(n+1)}\hbar} = -\frac{n}{2}\hbar$$

führe ein $l = \frac{n}{2}$ beachte: $n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow l$ ist ganz- oder halbzahlig

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow \beta_{min} = -l\hbar \\ &\beta_{max} \overset{①}{=} \beta_{min} + n\hbar = -l\hbar + 2l\hbar = +l\hbar \\ &\alpha \overset{②}{=} \beta_{min}^2 - \hbar\beta_{min} = l^2\hbar^2 + \hbar^2 l \\ & = \hbar^2 l(l+1) \end{aligned}}$$

Zusammenfassung

i) Die möglichen Eigenwerte von $\underline{L}^2$ sind

$$\alpha = l(l+1)\hbar^2 \quad \text{mit} \quad l = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \ldots$$

ii) Die möglichen Eigenwerte von $\underline{L}_z$ sind

$$\beta = m\hbar$$

$$\text{mit} \quad m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$$

$\Rightarrow$ „Drehimpuls – Quantelung"

„Richtungsquantelung":

Zu jedem l gibt es genau $(2l+1)$ mögliche Werte von m!

Notation in Zukunft

$$\hat{\underline{L}}^2 |l,m\rangle = \underbrace{\hbar^2 l(l+1)}_{\alpha} |l,m\rangle$$

$$\hat{L}_z |l,m\rangle = \hbar m |l,m\rangle \quad \text{mit} \quad m = -l,\dots,l$$

es folgt:

$$\hat{L}_{\pm} |l,m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\, |l, m\pm 1\rangle$$

$\vdots$