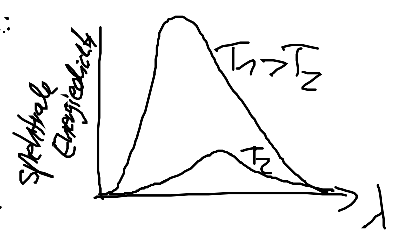
Wdh.: Planck'sche Strahlungsgesetz



λ — Wellenlänge

$u(\nu,T)$

$$\lambda \sim \frac{1}{\nu}$$

$$U(T) \sim T^4 = \int_0^\infty d\nu\, u(\nu,T)$$

Klassisch:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Wien: } u(\nu,T) = \nu^3 a e^{-b\frac{\nu}{T}} \\ \qquad a,b = \text{const} \\ \qquad \text{gut bei hohen Frequenzen (kleine } \lambda) \\ \text{Rayleigh: } u(\nu,T) = \dfrac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \\ \qquad \text{gut bei kleinen Frequenzen (große } \lambda) \end{array}\right.$$

Lösung:

Planck'sche Hypothese

Das Strahlungsfeld im Hohlraum besteht aus Schwingungen harmonischer Oszillatoren mit bestimmten Frequenzen ν

Klassisch: Jeder Oszillator hat ein kontinuierliches Energie- und damit Frequenzspektrum:

$$\text{d.h. } 0 \le \nu \le \infty \,, \quad 0 \le E \le \infty$$

jetzt: Die Oszillatorenergien sind "gequantelt"
$\hat{=}$ Es sind also nur diskrete Energiewerte möglich

Energie eines Oszillators

$$E_n = n \underbrace{\varepsilon_0}_{\text{elementares "Energiequant"}}$$

$$n = 0, 1, \cdots, \infty$$

$\Rightarrow$ Gesamtenergie

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{N(n)}_{\text{Zahl der Oszillatoren im Zustand } n} \underbrace{n\varepsilon_0}_{\text{Energie eines Oszillators im „Zustand“ } n}$$

mittlere Energie pro Oszillator

$$(*) \quad \varepsilon = \frac{\overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} N(n)\, n\varepsilon_0}^{E}}{\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} N(n)}_{N}}$$

N : Gesamtzahl der Oszillatoren

Annahme:

$$N(n) \sim e^{-\frac{n\varepsilon_0}{k_B T}}$$

Boltzmann-Statistik

($\Rightarrow$ VL Thermodynamik / Statist. Physik)

enthält keine QM

Einsetzen in $(*)$ und Benutzen der geometr. Reihe

$$\Rightarrow \underset{\text{mittlere Energie pro Oszillator}}{\varepsilon} = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/k_B T} - 1}}$$

Diese Energie "ersetzt" die Energie $k_B T$ im klassisch hergeleiteten Ansatz von Raleigh

$$\Rightarrow u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/k_BT}-1}$$

Erinnerung an Wien: $u(\nu,T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$

Noch zu fordern

$$\boxed{\varepsilon_0 = h\nu}$$ elementares Energiequant

mit $h = 6.6 \cdot 10^{-34}\,Js$
Planck'sche Konstante

$$\Rightarrow \boxed{u(\nu,T) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^3 \frac{h}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}}$$ Planck'sches Strahlungsgesetz

- beschreibt die experimentellen Resultate im gesamten Frequenzbereich
- enthält die Ansätze von Wien und Raleigh als Grenzfälle $h\nu \ll k_BT$ bzw $h\nu \gg k_BT$

Zentrale Ideen

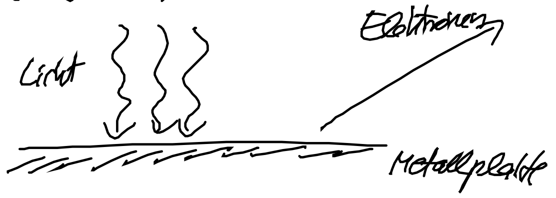
- Energiequantelung: $E_n = n\varepsilon_0 = nh\nu$
- Die mittlere Energie pro Oszillator

$$\varepsilon = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1} \neq k_BT$$ klass. Gleichverteilungssatz

I.2. Photoeffekt und Comptoneffekt

Photoeffekt

Hertz (1887)

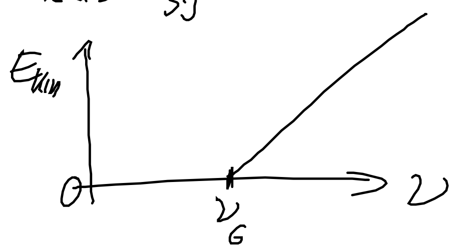


messe kinet. Energie der Elektronen als Funktion der Frequenz des eingestrahlten Lichts

Beobachtung:

- Oberhalb einer Grenzfrequenz ν_G treten aus der Metalloberfläche Elektronen aus

- Kinet. Energie E_{kin} dieser "Photoelektronen" ist unabhängig von der Intensität des Lichts, aber frequenzabhängig



Klassische Elektrodynamik:

Licht besteht aus elektromagnet. Wellen

$$\text{Energie } U \sim \frac{1}{2}\big(\underbrace{\underline{E}^2}_{\text{elektr. Feld}} + \underbrace{\underline{B}^2}_{\text{magnet. Feld}}\big) \sim \text{Intensität } I$$

man würde also Zusammenhang $E_{kin} \leftrightarrow I$ erwarten, dieser ist aber offensichtlich nicht gegeben!

Deutung durch Einstein (1905)

Das Licht verhält sich bei der Wechselwirkung mit Materie wie eine Ansammlung von Lichtquanten (Photonen)

Jedes Photon hat Energie $h\nu$

Frequenz

Planck'sche Konstante

Jedes aus dem ~~Met~~ Metall befreite Elektron hat genau ein Lichtquant absorbiert und erhält damit seine Energie:

$$\Rightarrow E_{kin} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{klass., nicht-relativistisch}} = h\nu - W \quad , \nu \geq \nu_G$$

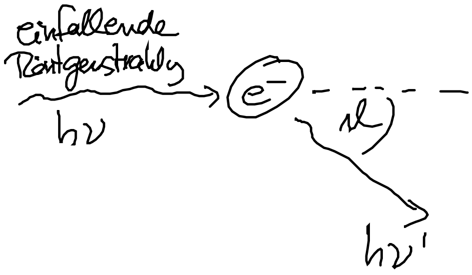
Austrittsarbeit (materialabhängig)

Einstein's Lichtquantenhypothese ist ein zentrales Beispiel für den „Welle-Teilchen-Dualismus"

Weiterer "Beweis" der Lichtquantenhypothese:

Compton-Effekt (1922/23)

→ Streuung von Röntgenstrahlen an (freien oder schwach gebundenen) Elektronen (e^-)



genauer: Die Änderung der Frequenz bzw. Wellenlänge der Strahlung ergibt sich:

$$\Delta\lambda = \lambda_C (1 - \cos\vartheta)$$

Streuwinkel

mit $\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$ „Compton-Wellenlänge"

enthält nur ~~die~~ drei Fundamentalkonstanten

<u>Erklärung:</u>

Das Ganze ist ein Stoßprozess zwischen zwei Teilchen (Photon und Elektron), bei dem Energie und Impuls erhalten ~~bl~~ bleiben

Photonen haben keine Masse und bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit

Aus der Formel für die relativist. Gesamtenergie

$$E^2 = (mc^2)^2 + p^2c^2$$

$$\text{mit } m=0 \Rightarrow E_{\text{Photon}} = pc$$

andererseits: $E_{\text{Photon}} = h\nu$

Gleichsetzen: $pc = h\nu \Leftrightarrow p = h\frac{\nu}{c}$

Energieerhaltung des Gesamtsystems Photon + Elektron
(Elektron ruht vor dem Stoß):

$$\underbrace{\underbrace{h\nu}_{E_{\text{Photon}}} + \underbrace{m_e c^2}_{E_{\text{Elektron}}}}_{E_{\text{vorher}}} = \underbrace{\underbrace{h\nu'}_{E_{\text{Photon}}} + \underbrace{\sqrt{p^2c^2 + m_e^2 c^4}}_{E_{\text{Elektron}}}}_{\text{nachher}}$$

Kombiniere mit Impulserhaltung $\Longrightarrow$ Ausdruck für $\Delta\lambda$, λ_C

Allgemeinere Folgerungen für Photonen

i) $E = h\nu$ (Energie des Lichtquants)

ii) $E = pc$ (aus dem relativist. Ausdruck)

iii) $\omega = 2\pi\nu$
$= c|\underline{k}|$ „Dispersionsrelation" elektromagnetischer Wellen im Vakuum

z.B. $\underbrace{\underline{E}(\underline{r},t)}_{\text{elektr. Feld}} \sim e^{i\underline{k}\cdot\underline{r} - i\omega t}$, $\underline{k}$: Wellenvektor

Kombiniere:

$$\Rightarrow p \overset{i),ii)}{=} \frac{h\nu}{c} \overset{iii)}{=} \frac{h}{2\pi}\frac{\omega}{c} = \frac{h}{2\pi}|\underline{k}| = \hbar|\underline{k}|$$

mit $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

Also:

$\boxed{p = \hbar \underline{k}}$ Relation zwischen Impuls und Wellenvektor für das Photon

I.3. Bohr'sches Atommodell

Rutherford: Streuung von α-Teilchen (2-fach positiv geladene Helium-Atome) an Goldfolie

man findet: α-Teilchen werden abgelenkt (~~Stoß~~ Stoßprozess)

Schlußfolgerung: Es gibt einen (positiv geladenen) Atomkern ($\varnothing \sim 10^{-15}$ m), durch den die α-Teilchen abgelenkt werden

Idee: (Bohr'sches Modell) Elektronen umkreisen den Kern auf elliptischen Bahnen (Zusammenspiel von anziehender Coulombkraft und Zentrifugalkraft)

Probleme: a) Elektronen sind beschleunigte Ladung
→ elektromagnet. Strahlung
→ im Laufe der Zeit kommt es zu Energieabnahme

Warum stürzen die Elektronen nicht in den Kern ??

b) Warum beobachtet man statt kontinuierlicher Energieabstrahlung eine diskrete Energieabstrahlung

Bohr'sche Postulate

- Die möglichen Energien der kreisenden Elektronen sind diskret (E_n, $E_{m \neq n}$, ...)

→ „stationäre Zustände"

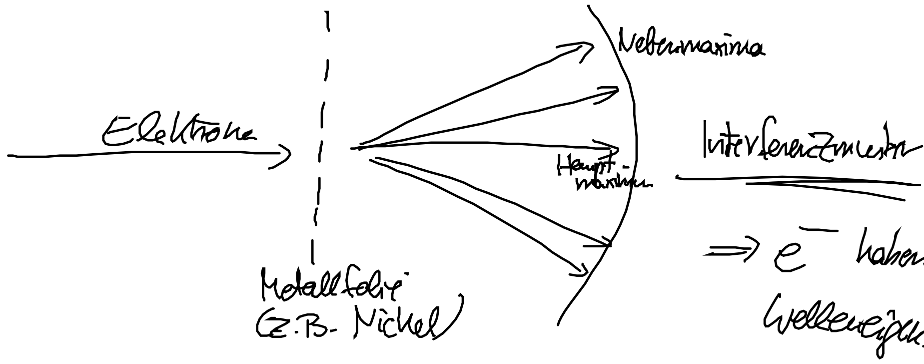
- Übergänge zwischen benachbarten stationären Zustände bewirken elektromagnet. Strahlung (Aussendung eines Photons)

$$E_n - E_m = h\nu$$

I.4. Zum Wellencharakter der Materie

experimentellen Nachweis z.B. Davisson, Germer (1927)

Streuung von e^- an Kristalloberflächen



$\Rightarrow e^-$ haben also Welleneigenschaften

Postulat von de Broglie (1924)

Ebenso, wie sich das Licht als System von Teilchen verhalten kann, können materielle Objekte (z.B. Elektronen) auch Wellencharakter haben!

Konkret: Die Relationen

$$\boxed{\begin{aligned} E &= h\nu = \hbar\omega \\ \text{und} \quad \underline{p} &= \hbar \underline{k} \end{aligned}}$$

sollen für alle (auch für nicht-relativist.) Teilchen gelten, in Analogie zum Licht !!

„Dispersionsrelationen" für freie Teilchen

Relation zw. Frequenz und Wellenvektor

• Nicht-relativistisch ($\underbrace{v}_{\text{Geschw.}} \ll \underbrace{c}_{\text{Lichtgeschw.}}$)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \overset{\underline{p}=\hbar\underline{k}}{=} \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$= \hbar\omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \qquad \text{also} \quad \omega \sim k^2 \quad !!$$

- Relativistisch ($v \lesssim c$)

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2} = \hbar\omega$$

$$\omega = \frac{1}{\hbar}\sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \hbar^2 k^2} \qquad \omega \sim k \quad !!$$

Speziell Photonen ($m_0 = 0$) $\Rightarrow \omega = ck$

Zusammenfassung Welle-Teilchen Dualismus

	Wellencharakter	Teilchencharakter
Licht	Klass.: Licht als Welle mit Frequenz ω, Wellenvektor $\underline{k}$, $\omega = c\lvert\underline{k}\rvert$	qm: $E = \hbar\omega$, $\underline{p} = \hbar\underline{k}$ mit $E = pc$ (für Photon)
Elektronen (Materie)	qm: $\omega = \frac{E}{\hbar}$, $\underline{k} = \frac{\underline{p}}{\hbar}$ mit $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ für freie, nicht-relativist. Elektronen	Klass.: Teilchen mit Energie E, Impuls $\underline{p}$; nicht-relativist. $E = \frac{p^2}{2m}$