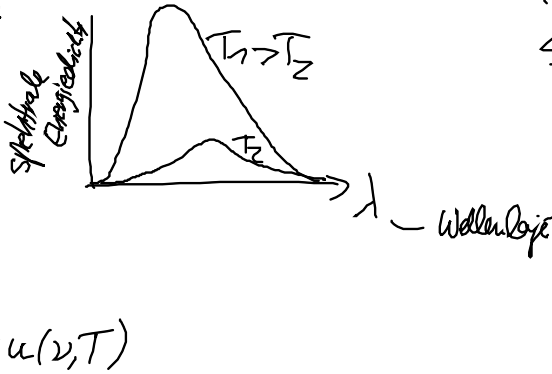


Wdh:



Planck'sche Strahlungsgesetz

$$\lambda \sim \frac{1}{\nu}$$

$$U(T) \sim T^4$$

$$= \int_0^{\infty} d\nu u(\nu, T)$$

Klassisch:

Wien:  $u(\nu, T) = \nu^3 a e^{-b \frac{\nu}{T}}$

$a, b = \text{const}$   
gut für hohe Frequenzen  
(kleine  $\lambda$ )

Raleigh:  $u(\nu, T) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} k_B T$

gut bei kleinen Frequenzen  
(große  $\lambda$ )

Lösung:

Planck'sche Hypothese

Das Strahlungsfeld im Hohlraum besteht aus Schwingungen harmonischer Oszillatoren mit bestimmten Frequenzen  $\nu$

Klassisch: Jeder Oszillator hat ein kontinuierliches Energie- und damit Frequenzspektrum:

$$\text{d.h. } 0 \leq \nu \leq \infty, \quad 0 \leq E \leq \infty$$

jetzt: Die Oszillatorenergien sind "gequantelt"  
 $\hat{=}$  ES sind also nur diskrete Energiemittel möglich

Energie eines Oszillators  $E_n = n \epsilon_0$  elementares "Energiequant"

$n = 0, 1, \dots, \infty$

⇒ Gesamtenergie

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} N(n) \underbrace{n \epsilon_0}_{\text{Energie eines Oszillators im "Zustand" } n}$$

Zahl der Oszillatoren im Zustand  $n$

mittlere Energie pro Oszillator

$$\textcircled{*} \quad \epsilon = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} N(n) n \epsilon_0}{\sum_{n=0}^{\infty} N(n)} \quad \left. \begin{array}{l} \} E \\ \} N : \text{Gesamtzahl der Oszillatoren} \end{array} \right\}$$

Annahme:

$$N(n) \sim e^{-\frac{n \epsilon_0}{k_B T}}$$

Boltzmann-Statistik

(⇒ VL Thermodynamik / Statist. Physik)

enthält keine QM

Einsetzen in  $\textcircled{*}$  und Benutzen der geometr. Reihe

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{\epsilon_0}{e^{\frac{\epsilon_0}{k_B T}} - 1}$$

mittlere Energie pro Oszillator

Diese Energie "ersetzt" die Energie  $k_B T$  im klassischen hochleitenden Ansatz von Rayleigh

$$\Rightarrow u(\nu, T) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \frac{\epsilon_0}{e^{\frac{\epsilon_0}{k_B T}} - 1}$$

Erinnerung an  
Wien:  ~~$\epsilon$~~   
 $u(\nu, T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$

↙  
Noch zu finden

$$\boxed{\epsilon_0 = h \nu} \quad \text{elementares Energiequant}$$

mit  $h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$   
Plancksche Konstante

$$\Rightarrow \boxed{u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^3 \frac{h}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}} \quad \text{Planck'sches Strahlungsgesetz}$$

- beschreibt die experimentellen Resultate im gesamten Frequenzbereich
- enthält die Ansätze von Wien und Rayleigh als Grenzfälle  $h\nu \ll k_B T$  bzw.  $h\nu \gg k_B T$

### Zentrale Ideen

- Energiequantisierung:  $E_n = n \epsilon_0 = n h \nu$

- Die mittlere Energie pro Oszillator

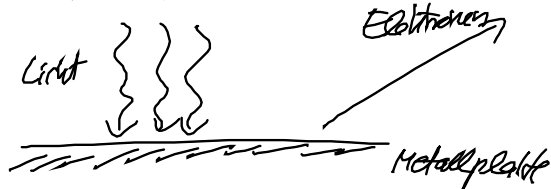
$$\epsilon = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \neq k_B T$$

Klass. Gleichverteilungs-  
Satz

# I.2. Photoeffekt und Comptoneffekt

## Photoeffekt

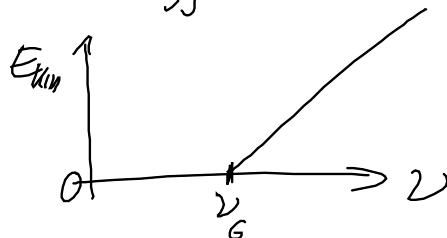
Hertz (1887)



messe kinet. Energie  
der Elektronen als  
Funktion der Frequenz  
des einfallenden Lichts

## Beobachtung:

- Oberhalb einer Grenzfrequenz  $\nu_G$  treten aus der Metalloberfläche Elektronen aus
- Kinet. Energie  $E_{kin}$  dieser "Photoelektronen" ist unabhängig von der Intensität des Lichts, aber frequenzabhängig



Klassische Elektrodynamik:

Licht besteht aus elektromagnet. Wellen

$$\text{Energie } U \sim \frac{1}{2} (\underbrace{E^2}_{\text{elektr. Feld}} + \underbrace{B^2}_{\text{magnet. Feld}}) \sim \text{Intensität } I$$

man würde also Zusammenhang  $E_{kin} \leftrightarrow I$  erwarten,  
dieser ist aber offensichtlich nicht gegeben!

## Deutung durch Einstein (1905)

Das Licht verhält sich bei der Wechselwirkung mit Materie wie eine Ansammlung von Lichtquanten (Photonen)

Jedes Photon hat Energie  $h\nu$   
/  $\nu$  — Frequenz  
Planck'sche Konstante

Jedes aus dem ~~Met~~ Metall befreite Elektron hat genau ein Lichtquant absorbiert und erhält damit seine Energie:

$$\Rightarrow E_{\text{kin}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{klass., nicht-relativistisch}} = h\nu - W, \quad \nu \geq \nu_0$$

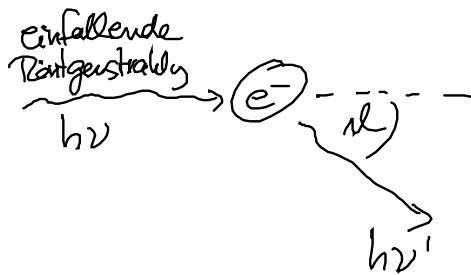
Austrittsarbeit  
(materialabhängig)

Einstein's Lichtquantenhypothese ist ein zentrales Beispiel für den „Welle-Teilchen-Dualismus“

Weiterer „Beweis“ der Lichtquantenhypothese:

Compton-Effekt (1922/23)

→ Streuung von Röntgenstrahlen an (frei oder schwach gebundenen) Elektronen ( $e^-$ )



genauer: Die Änderung der Frequenz bzw. Wellenlänge des Strahles ergibt sich.

$$\Delta\lambda = \lambda_C (1 - \cos \alpha)$$

Streuwinkel

mit  $\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$  „Compton-Wellenlänge“

enthält nur ~~die~~ drei  
Fundamentalkonstanten

### Erläuterung:

Der Compton ist ein Stoßprozess zwischen zwei Teilchen (Photon und Elektron), bei dem Energie und Impuls erhalten ~~bleiben~~ bleiben.

Photonen haben keine Masse und bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit

Aus der Formel für die relativist. Gesamtenergie:

$$E^2 = (mc^2)^2 + p^2 c^2$$

mit  $m=0 \Rightarrow E_{\text{Photon}} = pc$

andernfalls:  $E_{\text{Photon}} = h\nu$

Glückssetzen:  $pc = h\nu \Leftrightarrow p = h \frac{\nu}{c}$

Energieerhaltung des Gesamtsystems Photon + Elektron  
(Elektron ruht vor dem Stoß):

$$\underbrace{\frac{h\nu}{E_{\text{Photon}}} + \frac{m_e c^2}{E_{\text{Elektron}}}}_{E_{\text{vorher}}} = \underbrace{\frac{h\nu'}{E_{\text{Photon}}} + \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}}_{E_{\text{nachher}}}$$

Kombiniere mit Impulserhaltung  $\Rightarrow$  Ausdruck für  $\Delta t, \Delta c$

Allgemeiner  
Folgerungen für Photon

- i)  $E = h\nu$  (Energie des Lichtquants)
- ii)  $E = pc$  (aus dem relativist. Ausdruck)

iii)  $\omega = 2\pi\nu$   
 $= c|\underline{k}|$

„Dispersionsrelation“ elektromagnetischer  
Wellen im Vakuum

z.B.  $\underline{E}(\underline{r}, t) \sim e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$   
elekt. Feld } Wellenvektor

Kombination:

$$\Rightarrow p = \overset{(i), (ii)}{\frac{h\nu}{c}} = \overset{(iii)}{\frac{h}{2\pi} \frac{\omega}{c}} = \frac{h}{2\pi} |\underline{k}| = \hbar |\underline{k}|$$

$$\text{mit } \lambda = \frac{h}{2\pi}$$

Also :

$$p = \hbar k$$

Relation zwischen Impuls und Wellenlänge für das Photon

### I.3. Bohr'sches Atommodell

Rutherford : Streuung von  $\alpha$ -Teilchen (2-fach positiv geladene Helium-Atome) an Goldfolie

man findet:  $\alpha$ -Teilchen werden abgelenkt (~~Stoß~~ Stoßprozess)

Schlussfolgerung: Es gibt einen (positiv geladenen) Atomkern ( $\phi \sim 10^{-15}$  m), durch den die  $\alpha$ -Teilchen abgelenkt werden

Idee: Elektronen umkreisen den Kern auf elliptischen Bahnen (Zusammenspiel von <sup>anziehender</sup> Coulombkraft und Zentrifugalkraft)

(Bohr'sches Modell)



Probleme: a) Elektronen sind beschleunigte Ladung  
→ elektromagn. Strahlung  
→ im Laufe der Zeit kommt es zu  
Energieabnahme

Warum stürzen die Elektronen nicht  
in den Kern?

b) Warum beobachtet man statt kontinuierlicher  
Energieabstrahlung eine diskrete Energieabstrahlung

### Bohr'sche Postulate

• Die möglichen Energien der kreisenden Elektronen  
sind diskret ( $E_n, E_{m \neq n}, \dots$ )

→ „stationäre Zustände“

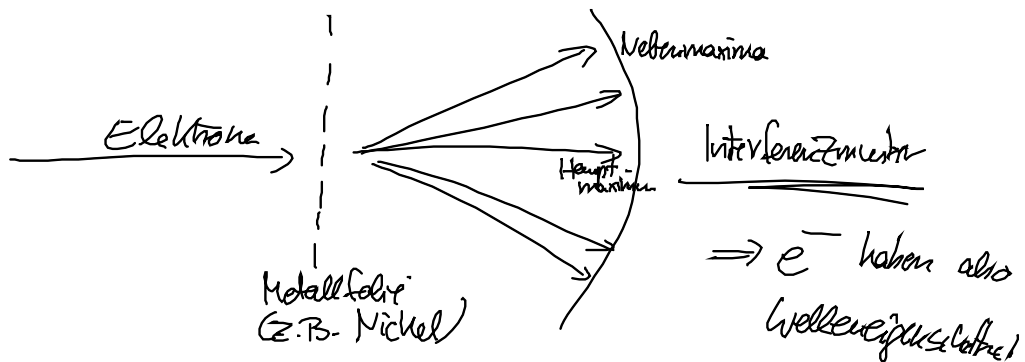
• Übergänge zwischen <sup>benachbarten</sup> stationären Zuständen  
bewirken elektromagn. Strahlung (Ausstrahlung eines Photons)

$$E_n - E_m = h \nu$$

### I.4. Zum Wellencharakter der Materie

experimenteller Nachweis z.B. Davisson, Germer (1927)

Streuung von  $e^-$  an Kristalloberflächen



Postulat von de Broglie (1924)

Ebenso, wie sich das Licht als System von Teilchen verhalten kann, können materielle Objekte (z.B. Elektronen) auch Welleneigenschaften haben!

Korollar: Die Relationen

und 
$$\begin{matrix} E = h\nu = \hbar\omega \\ p = \hbar k \end{matrix}$$

sollen für alle (auch für nicht-relativist.) Teilchen gelten, in Analogie zum Licht !/

Dispersionsrelationen für freie Teilchen

Relation zw. Frequenz und Wellenvektor

• nicht-relativistisch ( $v \ll c$ ) <sup>Geschw.</sup> <sup>Lichtgeschw.</sup>

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad p = \hbar k$$

$$= \hbar \omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad \text{also } \omega \sim k^2 \quad !!$$

• Relativistisch ( $v \leq c$ )

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2} = \hbar \omega$$

$$\omega = \frac{1}{\hbar} \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \hbar^2 k^2} \quad \omega \sim k \quad !!$$

Speziell Photonen ( $m_0 = 0$ )  $\Rightarrow \omega = ck$

Zusammenfassung Welle-Teilchen Dualismus

	Wellencharakter	Teilchencharakter
Licht	<u>Klass.:</u> Licht als Welle mit Frequenz $\omega$ , Wellen- vektor $k$ , $\omega = ck$	<u>qm.:</u> $E = \hbar \omega$ $p = \hbar k$ mit $E = pc$ (für Photonen)
Elektronen (Materie)	<u>qm.:</u> $\omega = \frac{E}{\hbar}$ , $k = \frac{p}{\hbar}$ mit $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ für freie, nicht-relativist. Elektronen	<u>Klass.:</u> Teilchen mit Energie $E$ , Impuls $p$ nicht-relativist. $E = \frac{p^2}{2m}$