

Wah.

$$P_{ij} |\phi_N^{(\pm)}\rangle = \pm |\phi_N^{(\pm)}\rangle$$

$$\text{und } \langle \phi_N^{(+)} | \phi_N^{(-)} \rangle = 0$$

Insgesamt gilt:

zeitunabhängiger Symmetriecharakter, Orthogonalität der Zustände

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$$

zerfällt in: $\mathcal{H}^{(+)}$ Raum der symmetrischen Zustände

$\mathcal{H}^{(-)}$ Raum der antisymmetrischen Zustände

Es gilt:

Bosonen werden durch symmetr. Zustände charakterisiert

↖ Teilchen mit ganzzahligem Spin

z.B. π -Meson ($s=0$), Photon ($s=1$), Phonon ($s=1$)

${}^4_2\text{-Teilchen}$ ($s=0$)

Fermionen werden durch antisymmetrische Zustände charakterisiert

↖ Teilchen mit halbzahligem Spin ($s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$)

z.B. Elektronen ($s = \frac{1}{2}$), Protonen ($s = \frac{1}{2}$), Neutronen ($s = \frac{1}{2}$)

Entscheidend ist hier also der Spin-Statistik-Zusammenhang

(aufgestellt von W. Pauli 1925, zunächst empirisch zur

Deutung von Atomspektren, später strenger Beweis im Rahmen der Quantenfeldtheorie. (1940))

Pauli Prinzip für Fermionen (nicht für Bosonen)

Zwei Fermionen können sich nicht in den gleichen Einteilchenzuständen befinden

⇒ können also nicht in allen Quantenzahlen identisch sein.

z.B. zwei Fermionen in Ortsdarstellung

Falls diese den gleichen Spin haben, können sie sich nicht am gleichen Raumpunkt aufhalten.

Grundlage für den Aufbau des Periodensystems der Elemente.

Frage nun:

Was sind die erlaubten Zustände in $H^{(+)}$ und $H^{(-)}$?

Führe ein

$$\hat{S}_N^{(\pm)} = \frac{1}{N!} \sum_p (\pm)^p \hat{P}$$

- Summe läuft über alle denkbaren Permutationen des N -Tupels $(1, \dots, N)$

- p ist die Zahl der Transpositionen aus der \hat{P} aufgebaut ist
($\hat{P} = \prod \hat{P}_{ij}$)

(Bei Antisymmetrie sein)
($\Rightarrow (-1)^p = \begin{cases} 1 & \text{für gerade Permutationen} \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen} \end{cases}$)

- Vorfaktor: Es gibt $N!$ Permutationen (incl. der Identität)

$$\Rightarrow |\phi_N^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_N^{\pm} (|\phi_{\alpha_1}^{(1)}\rangle |\phi_{\alpha_2}^{(2)}\rangle \dots |\phi_{\alpha_N}^{(N)}\rangle)$$

Betrachte zunächst Fermionen

Beispiel:

$$N=2 \quad \Rightarrow \quad \hat{P} = \hat{P}_{12}, \quad p=0,1$$

$$\hat{S}_2^{(-)} = \frac{1}{2} (1 - \hat{P}_{12})$$

$$|\phi\rangle = |\phi_{\alpha_1}^{(1)}\rangle |\phi_{\alpha_2}^{(2)}\rangle$$

$$\hat{S}_2^{(-)} |\phi\rangle = \frac{1}{2} (|\phi_{\alpha_1}^{(1)}\rangle |\phi_{\alpha_2}^{(2)}\rangle - |\phi_{\alpha_2}^{(2)}\rangle |\phi_{\alpha_1}^{(1)}\rangle)$$

Beispiel

$$\hat{S}_2^{(-)} |\phi\rangle = \frac{1}{2} (|\phi^{(1)}(\sigma_1)\rangle |\phi^{(2)}(\sigma_2)\rangle - |\phi^{(2)}(\sigma_1)\rangle |\phi^{(1)}(\sigma_2)\rangle) = |\psi^{(-)}\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \psi^{(-)} | \psi^{(-)} \rangle &= \frac{1}{4} (|\phi^{(1)}(\sigma_1)\rangle |\phi^{(2)}(\sigma_2)\rangle|^2 + |\phi^{(2)}(\sigma_1)\rangle |\phi^{(1)}(\sigma_2)\rangle|^2 \\ &\quad - \phi^{(1)*}(\sigma_1) \phi^{(2)*}(\sigma_2) \phi^{(2)}(\sigma_1) \phi^{(1)}(\sigma_2) \\ &\quad - \phi^{(2)*}(\sigma_1) \phi^{(1)*}(\sigma_2) \phi^{(1)}(\sigma_2) \phi^{(2)}(\sigma_1)) \end{aligned}$$

Setze

$$\sigma_1 = \sigma_2 \quad \Rightarrow \quad \langle \psi^{(-)} | \psi^{(-)} \rangle = 0$$

\Rightarrow Für 2 identische Teilchen (ohne weitere Quantenzahlen, z.B. Spin) ist die Wahrscheinlichkeit am gleichen Ort zu sein null.

Einbeziehung des Spins

geschieht typischerweise über einen Produktansatz der Form

$$|\Psi^{(-)}\rangle = \phi(\underline{r}_1, \underline{r}_2) \chi(\underline{s}_1, \underline{s}_2)$$

- Für 2 Fermionen muss dann entweder die Ortswellenfunktion oder die Spinwellenfunktion antisymmetrisch sein, die jeweils andere ist symmetrisch.
- Implizit haben wir angenommen, dass keine Spin-Behkopplung vorliegt.
Beispiel für antisymmetrische Spin-WF: $\frac{1}{2} (\uparrow^{(1)} \downarrow^{(2)} - \downarrow^{(1)} \uparrow^{(2)})$

N Fermionen

$$|\Phi_N^{(-)}\rangle = \hat{S}_N^{(-)} (|\phi_{\alpha_1}^{(1)}\rangle \dots |\phi_{\alpha_N}^{(N)}\rangle)$$

$$= \frac{1}{N!} \det \begin{pmatrix} |\phi_{\alpha_1}^{(1)}\rangle & \dots & |\phi_{\alpha_1}^{(N)}\rangle \\ |\phi_{\alpha_2}^{(1)}\rangle & & |\phi_{\alpha_2}^{(N)}\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ |\phi_{\alpha_N}^{(1)}\rangle & & |\phi_{\alpha_N}^{(N)}\rangle \end{pmatrix}$$

Slater Determinante

- Zeilen haben gleiche Quantenzahl
- Spalten haben dasselbe Teilchen

Beachte:

Sind in dem N -Teilchenzustand 2 Sätze von Quantenzahlen identisch (also $\alpha_i = \alpha_j$ für $i \neq j$), dann impliziert das die Gleichheit zweier Zeilen.

\Rightarrow Determinante verschwindet.

Zwei Teilchen können nicht in allen Quantenzahlen übereinstimmen.
 \Rightarrow entspricht dem Pauli-Prinzip.

Nach zu tun: Normierung

$$\langle \phi_N^{(-)} | \phi_N^{(-)} \rangle = |f_N|^2 \langle \hat{S}_N^{(-)} \phi_{\alpha_1}^{(1)} \dots \phi_{\alpha_N}^{(N)} | \hat{S}_N^{(-)} \phi_{\alpha_1}^{(1)} \dots \phi_{\alpha_N}^{(N)} \rangle$$

$$= |f_N|^2 \langle \phi_{\alpha_1}^{(1)} \dots \phi_{\alpha_N}^{(N)} | (\hat{S}_N^{(-)})^\dagger \hat{S}_N^{(-)} \phi_{\alpha_1}^{(1)} \dots \phi_{\alpha_N}^{(N)} \rangle$$

Es gilt ohne Beweis $\stackrel{!}{=} \uparrow$
 $(\hat{S}_N^{(-)})^\dagger = \hat{S}_N^{(-)}$

und

$$(\hat{S}_N^{(-)})^2 = \hat{S}_N^{(-)} \quad | \text{ idempotent ("Projektoroperator")} |$$

$$1 = |f_N|^2 \langle \phi_{\alpha_1}^{(1)} \dots \phi_{\alpha_N}^{(N)} | \hat{S}_N^{(-)} | \phi_{\alpha_1}^{(1)} \dots \phi_{\alpha_N}^{(N)} \rangle$$

$$= |f_N|^2 \cdot \frac{1}{N!} \left| \begin{array}{cccc} \underbrace{\langle \phi_{\alpha_1}^{(1)} | \phi_{\alpha_1}^{(1)} \rangle}_1 & \dots & \dots & \underbrace{\langle \phi_{\alpha_N}^{(N)} | \phi_{\alpha_1}^{(1)} \rangle}_0 \\ \underbrace{\langle \phi_{\alpha_1}^{(1)} | \phi_{\alpha_N}^{(N)} \rangle}_0 & \dots & \dots & \underbrace{\langle \phi_{\alpha_N}^{(N)} | \phi_{\alpha_N}^{(N)} \rangle}_1 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow \frac{|f_N|^2}{N!} = 1 \quad \Rightarrow \quad f_N = \sqrt{N!}$$

⇒ Endergebnis für antisymmetrischen Zustände

$$|\phi_N^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} S_N^{(-)} |\phi_{\alpha_1}^{(1)} \dots \phi_{\alpha_N}^{(N)}\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \left| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right|$$

Slaterdeterminante

Betrachte nun Bosonen

$$|\phi_N^{(+)}\rangle = C + \hat{S}_N^{(+)} (|\phi_{\alpha_1}^{(1)} \dots \phi_{\alpha_N}^{(N)}\rangle)$$

$$\hat{S}_N^{(+)} = \frac{1}{N!} \sum_P \hat{P}$$

- Vorfaktor C nicht trivial, da Zustände mehrfach besetzbar
- Die Zustände sind symmetrisch unter Austausch zweier Teilchen

Die Wahrscheinlichkeitsdichte verschwindet also nicht, wenn zwei Bosonen den gleichen Zustand besetzen. (Kein Pauli-Prinzip!)

Bsp. $S_2^{(+)} = \frac{1}{2} (\hat{1} + \hat{P}_{12})$

Beachte noch

$S_N^{(+)}$ und $S_N^{(-)}$ projizieren auf unterschiedliche Unterräume von \mathcal{H}_N