

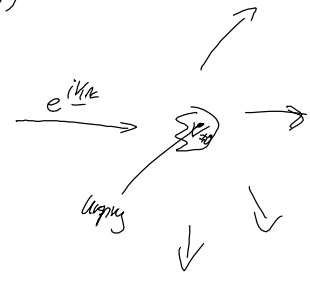
"Teilchen"-Strahlung an einem (zeitunabhängigen) Potential  $V$  (nicht-relativistisch)

Ansatz für Wellenfunktion nach der Strahlung (Strahlzustand)

$$\psi(\underline{r}) = e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} + f(k_{\text{ein}}, k) \frac{e^{i\underline{k}'\cdot\underline{r}}}{r}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{Streuzugabe} \\ \text{bestimmt durch das} \\ \text{Streupotential } V}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{auslaufende} \\ \text{Kugelwelle}}}$

$\underline{k}$ : einlaufende Wellenvektoren  
 $\underline{e}_{\text{in}} = \frac{\underline{k}}{k}$



Aus  $f$  erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt (Messgröße!)

Formale Beschreibung des Streuproblems: Lippmann-Schwinger-Gl. (aus zeitunabhängiger Schrödinger-Gl.)

$$\hat{H} |\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}\rangle = E |\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}\rangle$$

$\hat{H} = \hat{H}_0 + V(\underline{r})$   
frei Teilchen      Streupotential

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{gestreuter Zustand}}$

"+" : physikalische Lösung (s.o.)  
 "-" : formale Lösung mit einlaufender Kugelwelle  $\sim e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}}$   
 $\sim e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}}$   
 $\sim \frac{1}{N}$   
 unphysikalisch, aber wichtig für die formale Behandlung!

"auflösen" nach  $|\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}\rangle$

$$|\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}\rangle = \underbrace{|\underline{k}\rangle}_{\substack{\text{Lösung für freies} \\ \text{Teilchen}}} + \hat{G}_0(E) \hat{V} |\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}\rangle$$

mit  $\hat{G}_0(E) = \frac{1}{E - \hat{H}_0}$

Operatoren!  
 "Resolvente"

Ortsdarstellung:

$$\langle \underline{r} | \psi_{\underline{k}}^{(\pm)} \rangle = \psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r})$$

$$\langle \underline{r} | \underline{k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

(Teilchen in einem großen Volumen  $V = \mathbb{R}^3$ )

$$\Rightarrow \langle \underline{r} | \psi_{\underline{k}}^{(\pm)} \rangle = \langle \underline{r} | \underline{k} \rangle + \int d\underline{r}' \langle \underline{r} | \hat{G}_0(E) | \underline{r}' \rangle \langle \underline{r}' | \hat{V} | \psi_{\underline{k}}^{(\pm)} \rangle$$

$$\Leftrightarrow \psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} + \int d\underline{r}' \langle \underline{r} | \hat{G}_0(E) | \underline{r}' \rangle V(\underline{r}') \psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}') \quad (*)$$

$\hat{V}$  wirkt multiplikativ in der Ortsdarstellung!

Also zu berechnen:

$$\langle \underline{r} | \hat{G}_0(E) | \underline{r}' \rangle = \langle \underline{r} | \frac{1}{E - \hat{H}_0} | \underline{r}' \rangle$$

"freie (ungestörte) Green'sche Funktion"

benutze:  $\hat{H}_0 = \frac{p^2}{2m} \rightarrow$  Erwidern von Impulsigen Zuständen

$$\langle N | \hat{G}_0(E) | N' \rangle = \sum_p \langle N | \hat{G}_0(E) | p \rangle \langle p | N' \rangle$$

(Summe, da Impulse diskretisiert (Tabelle zu den Boxen!)  $V=C^3$ ) (normierte) Impulsigen Zustände  $|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} |k\rangle$

benutze:  $\hat{G}_0(E) |p\rangle = \frac{1}{E - \frac{p^2}{2m}} |p\rangle$  (denn  $\hat{H}_0 |p\rangle = \frac{p^2}{2m} |p\rangle$ )  
Zahl!

aufpassen:  $\langle N | p \rangle = \frac{1}{C^{3/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \frac{1}{C^{3/2}} e^{i \frac{1}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}$

$$\langle N | \hat{G}_0(E) | N' \rangle = \frac{1}{C^3} \sum_p \frac{e^{i \frac{1}{\hbar} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{E - \frac{p^2}{2m}}$$

Volumen  $V$  groß  $\Rightarrow$  Umwandlung der Summe in Integral (beachte Abstand zw. Impulsräumen  $\Delta p = \frac{\hbar 2\pi}{L}$ )

$$\langle N | \hat{G}_0(E) | N' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \frac{e^{i \frac{1}{\hbar} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{E - \frac{p^2}{2m}}$$

ersetze  $\frac{p}{\hbar} \rightarrow \tilde{p}$ ,  $\tilde{E} = \frac{E 2m}{\hbar^2}$

$$\Rightarrow \langle N | \hat{G}_0(E) | N' \rangle = \frac{2m}{\hbar^2 (2\pi)^3} \int d\tilde{p} \frac{e^{i\tilde{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{\tilde{E} - \tilde{p}^2}$$

Vereinfachen der Notation:  $\tilde{E} \rightarrow E$ ,  $\tilde{p} \rightarrow p$ . Muß später "repariert" werden

$$\langle N | \hat{G}_0(E) | N' \rangle = A \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{E - p^2} \stackrel{\text{aus p-Integration}}{\rightarrow} A \frac{1}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{E - p^2} \quad \boxed{p=|k|}$$

$$= A \frac{1}{(2\pi)^2} 2 \int_0^{\infty} dp \frac{f(p)}{E-p^2} \frac{\sin(p|x-x'|)}{p|x-x'|}$$

Polar koordinate  $\int_{-1}^1 d(\cos u) e^{ip|\cos u| |x-x'|}$

$$= A \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ix} \int_0^{\infty} dp \frac{f(p)}{E-p^2} (e^{ipx} - e^{-ipx})$$

$x = |x-x'|$   
 $\sin px = \frac{1}{2i}(e^{ipx} - e^{-ipx})$

Zweiter Term:

$$-\int_0^{\infty} dp \frac{f(p)}{E-p^2} e^{-ipx}$$

$$= \int_0^{-\infty} du \frac{-u}{(E-u^2)} e^{iux}$$

setze  $u = -p$   
 $\frac{dp}{du} = -1$

$$= + \int_{-\infty}^0 du \frac{u}{(E-u^2)} e^{iux}$$

$$= \int_{-\infty}^0 dp \frac{p}{(E-p^2)} e^{ipx}$$

Umbau  $u = p - \infty$

$$\Rightarrow \langle N | \hat{G}_0^{\pm}(E) | N' \rangle = \frac{A}{(2\pi)^2} \frac{1}{ix} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p e^{ipx}}{E-p^2}$$

Problem: Pole bei  $p = \pm \sqrt{E}$  !

Streng genommen ist  $\hat{G}_0^{\pm}(E)$  nicht wohl definiert!

Dies kann gelöst werden durch Grenzwertprozess

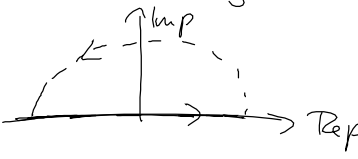
$$\langle N | \hat{G}_0^{\pm}(E) | N' \rangle = \frac{A}{(2\pi)^2} \frac{1}{ix} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p e^{ipx}}{E-p^2 \pm i\epsilon}$$

$\epsilon \rightarrow 0^+$   $\epsilon$  null, positiv

Bestimmung des Integrals durch Residuensatz

d.h. ersetze Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} dp$  durch Kurvenintegral in der komplexen Ebene  
 $p \rightarrow \text{Re } p + i \text{Im } p$

• Integrationsweg in der oberen Halbebene, damit Betrag des Halbkreis verschwindet  
( $\text{Im } p > 0$ )

$$e^{ipx} = e^{i \text{Re } p x} \underbrace{e^{i \text{Im } p x}}_{\text{verschwindet für Im } p \text{ groß!}}$$


$$\boxed{E > 0}$$

• Bestimmung der Pole

$$E - p_0^2 \pm i\epsilon = 0 \iff p_0^2 = E \pm i\epsilon$$

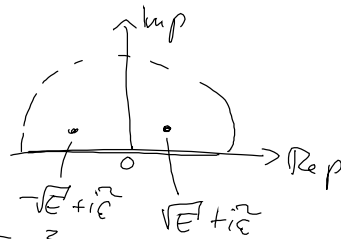
(Nenner des Integranden)

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_0 &= \pm \sqrt{E \pm i\epsilon} = \pm \sqrt{E} \sqrt{1 \pm i\frac{\epsilon}{E}} \\ &= \pm \sqrt{E} \left( 1 \pm i\frac{1}{2} \frac{\epsilon}{E} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \\ &\approx \pm \sqrt{E} \pm i\tilde{\epsilon} \end{aligned}$$

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{2\sqrt{E}}$$

$\Rightarrow$  Pole in der oberen Halbebene:

$$\begin{aligned} p_0^+ &= \sqrt{E} + i\tilde{\epsilon} \\ p_0^- &= -\sqrt{E} + i\tilde{\epsilon} \end{aligned}$$



Die Pole sind erster Ordnung:  $(p_0 - p)(p_0 + p) = E - p^2 \pm i\epsilon$

Anwendung Residuensatz:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz = \sum_{\alpha=1}^n \text{Res}_{z_\alpha} f(z), \quad z \in \mathcal{C}$$

Summation über die Polstellen

$$\text{mit } \text{Res}_{z_\alpha} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_\alpha} (z - z_\alpha) f(z)$$

für Pole erster Ordnung!

$$\text{hier: } f(z) = \frac{p e^{ipx}}{(p_0 - p)(p_0 + p)}$$

$$\Rightarrow \text{Res}_{p_0} f(z) = \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{p e^{ipx} (p - p_0)}{(p_0 - p)(p_0 + p)} = - \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{p e^{ipx}}{p_0 + p}$$

Damit:

$$\langle r | \hat{g}_0^{(\pm)}(E) | r' \rangle = \frac{A}{2\pi x} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p e^{ipx}}{E - p^2 \pm i\epsilon}$$

$$= \frac{-A}{4\pi} \frac{e^{\pm i\sqrt{E}x}}{x}$$

$$= \frac{-p_0 e^{ip_0 x}}{2p_0} = -\frac{1}{2} e^{ip_0 x}$$

gilt für beide Pole,  $p_0^+$  und  $p_0^-$

,  $\epsilon \rightarrow 0$

Green'sche Funktionen

Beachte: Die "physikalisch richtige" Funktion ist  $\hat{g}_0^+$ . Sie entspricht einer auslaufenden Kugelwelle!

Beachte:  $A = \frac{2m}{\hbar^2}$ ,  $x = |r - r'| \sqrt{E} \rightarrow \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = k$

$$\langle r | \hat{g}_0^{(\pm)}(E) | r' \rangle = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{\pm ik|r-r'|}}{|r-r'|}$$

Kugelwelle!

Einsetzen in (\*) (Gleichung für den Streuzustand in Ortsdarstellung)

$$\psi_k^{(\pm)}(r) = e^{ik \cdot r} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{\pm ik|r-r'|}}{|r-r'|} V(r') \psi_k^{(\pm)}(r')$$

Lippmann-Schwinger-Gleichung

Bemerkungen:

- Die Lippmann-Schwinger-Gl. ist exakte Integralgleichung
  - implizite Gleichung für die Streuzustände  $\psi_k^{(\pm)}(r)$
- Komplikation

(und die Pole)

- Das Ergebnis für die Green'sche Funktion des freien Teilchens erinnert an die Elektrodynamik: Lösung der Potentialgleichung im dyn. Fall!

Um Kontext zu sehen.

Gehet zurück zur zeitunabh. SG in der Ortsdarstellung, Fokus auf  $\psi_{\underline{k}}(\underline{r}) = \psi_{\underline{k}}^{(+)}(\underline{r})$

$$\left( E + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \psi_{\underline{k}}(\underline{r}) = V(\underline{r}) \psi_{\underline{k}}(\underline{r}) \quad | \cdot \frac{2m}{\hbar^2}$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\Leftrightarrow (k^2 + \Delta) \psi_{\underline{k}}(\underline{r}) = \tilde{V}(\underline{r}) \psi_{\underline{k}}(\underline{r}) \quad \text{mit } \tilde{V} = \frac{2m}{\hbar^2} V$$

Wir können die Lösung für das homogene Problem  $\tilde{V}=0!$

$$(k^2 + \Delta) \psi_{\underline{k}}^0(\underline{r}) = 0$$

Struktur bekannt aus der Potentialgl. in der Elektrodyn. (Lorenzform)  $\square \phi(\underline{r}, t) = 0$  homogene Wellengleichung

$$\square \phi(\underline{r}, t) = 0 \quad \text{homogene Wellengleichung}$$

$$\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}$$

Inhomogene Wellengleichung: Lösung durch Faltpotential, welches die Green'sche Funktion des homogenen Falls enthält!

Anwendung auf ein Streuproblem.

$$\psi_{\underline{k}}(\underline{r}) = \psi_{\underline{k}}^0(\underline{r}) + \int d\underline{r}' g(\underline{r}-\underline{r}') \tilde{V}(\underline{r}') \psi_{\underline{k}}(\underline{r}')$$

$$\text{mit } (k^2 + \Delta) g(\underline{r}-\underline{r}') = \delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

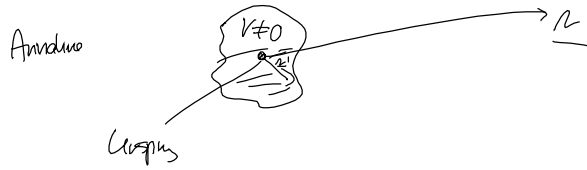
$g$  ist in diesem Bild Lösung des Streuproblems für punktförmige Streuquelle

### III, 5. Streuamplitude und Born'sche Näherung

erstes Ziel: Verbindung des Ausdrucks für  $\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r})$  aus der Lippmann-Schwinger-Gl. mit unserem ursprüngl. Ansatz

$$\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}) = e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} + \underbrace{f^{(\pm)}(\underline{k}_{\text{er}}, \underline{k})}_{\text{Streuamplitude}} \frac{e^{\pm i\underline{k}r}}{r}$$

Betrachte die Lippmann-Schwinger-Gl für  $V \gg r$



Streuzentrum am Ursprung lokalisiert, betrachte Abstände weit weg von Streuzentrum

In der Green'schen Funktion:  $\sim \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|}$  können wir Zähler und Nenner approximieren: (für  $V/r \gg 1$ )

benutze:  $\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r} + \frac{r' \cdot r}{r^3} + \dots$  wie (Multipolentwicklung!)

$\approx \frac{1}{r}$

Exponent:  $|r-r'| = \sqrt{(r-r')^2} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r \cdot r'}$

$= r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r \cdot r'}{r^2}} \approx r \sqrt{1 - \frac{2r \cdot r'}{r^2}}$  Wurzel entwickeln

$\approx r - \frac{r \cdot r'}{r} = r - r' \cdot \hat{e}_r$

$\Rightarrow \frac{e^{\pm ik|r-r'|}}{|r-r'|} \approx \frac{e^{\pm ikr}}{r} e^{\mp ikr \cdot r'}$  mit  $\hat{e}_r = \frac{r}{r}$

Einsetzen in die Lippmann-Schwinger-Gl.

Dort wird über  $r'$  integriert  $\rightarrow r$ -abhängige Terme können vorgezogen werden!

$\Rightarrow \psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}) = e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{\pm ikr}}{r} \int d\underline{r}' e^{\mp i\underline{k} \cdot \underline{r}'} V(\underline{r}') \psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}')$

Vergleich mit unserem ursprünglichen Ansatz

$$\Rightarrow f^{(\pm)}(\underline{k}_e, \underline{k}) = \frac{-m}{2\pi\hbar^2} \int d\underline{r}' e^{\pm i\underline{k}_e \cdot \underline{r}'} V(\underline{r}') \varphi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}')$$

Streuamplitude Streuamplitude