Wdh

• Säkularnäherung: vernachlässige osz. Terme im WW-Bild

$$\tilde{A}_\alpha(t) = e^{+iH_S t} A_\alpha e^{-iH_S t}$$

=> Schwierig bei (Nahe-) Entartungen

=> Born, Markov + Säkular => immer Lindblad

• Rezept (1) $H_I = \sum_\alpha A_\alpha \otimes B_\alpha$ $(A_\alpha = A_\alpha^\dagger \quad B_\alpha = B_\alpha^\dagger)$ $\quad Tr\{H_I \bar{\rho}_B\} = 0$

(2) $$\gamma_{\alpha\beta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{Tr\{e^{+iH_B\tau} B_\alpha e^{-iH_B\tau} B_\beta \bar{\rho}_B\}}_{C_{\alpha\beta}(\tau)} e^{+i\omega\tau} d\tau$$

[$\sigma_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int \frac{\gamma_{\alpha\beta}(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'$ für Lamb-shift]

(3) diagonalisiere System $H_S |a\rangle = E_a |a\rangle$

→ einsetzen

• Spezialfall falls H_S nicht entartet: Ratengleichung für Populationen in E-EB

$$\dot{\rho}_{aa} = \sum_b \underline{\gamma_{ab,ab}} \rho_{bb} - \sum_b \gamma_{ba,ba} \rho_{aa}$$

$$\sum_{\alpha\beta} \underbrace{\gamma_{\alpha\beta}(E_b - E_a)}_{\text{pos. definit}} \langle a|A_\beta|b\rangle \langle a|A_\alpha|b\rangle^* \geq 0$$

• Beispiel → ME für HO

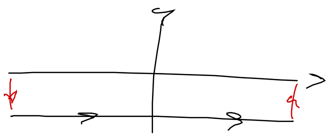
1.3.4. Gleichgewichts-TD

$$\bar{\rho}_B = \frac{e^{-\beta H_B}}{Z_B} \longrightarrow \boxed{C_{\alpha\beta}(\tau) = C_{\beta\alpha}(-\tau - i\beta) \quad \text{KMS-Beziehung}}$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\alpha\beta}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int C_{\beta\alpha}(\underbrace{-\tau - i\beta}_{\tau'}) e^{-i\omega\tau} d\tau \qquad \tau = -\tau' - i\beta$$

$$= \int_{+\infty - i\beta}^{-\infty - i\beta} C_{\beta\alpha}(\tau') e^{+i\omega(\tau' + i\beta)} (-d\tau') = \int_{-\infty - i\beta}^{+\infty - i\beta} C_{\beta\alpha}(\tau') e^{+i\omega\tau'} d\tau' \, e^{-\beta\omega}$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} C_{\beta\alpha}(\tau') e^{+i\omega\tau'} d\tau'}_{\gamma_{\beta\alpha}(\omega)} e^{-\beta\omega}$$



$$\boxed{\gamma_{\alpha\beta}(-\omega) = \gamma_{\beta\alpha}(+\omega) \cdot e^{-\beta\omega} \quad \text{KMS Beziehung}}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma_{ab,ab}}{\gamma_{ba,ba}} = e^{\beta(E_b - E_a)}$$

aus $\bar\rho_B = \frac{e^{-\beta H_B}}{Z_B}$ $\quad \mathcal{L}_{BMS} \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathcal{L}_{BMS}\bar\rho_S = 0 \qquad \bar\rho_S = \frac{e^{-\beta H_S}}{Z_S}$

System thermalisiert (ergodisches Verhalten)

$$\frac{n_B(\omega)}{1+n_B(\omega)} = e^{-\beta\omega}$$

Bsp: $\gamma_{11}(\omega) = \tilde\Gamma(\omega)\left[1+n_B(\omega)\right]$

$$\tilde\Gamma(-\omega)\left[1+n_B(-\omega)\right] = \left[-\tilde\Gamma(+\omega)\right]\left[-n_B(+\omega)\right] = \tilde\Gamma(+\omega)\left[1+n_B(+\omega)\right]\cdot e^{-\beta\omega}$$

analog $\quad \rho_B = \frac{e^{-\beta(H_B-\mu N_B)}}{Z_B} \qquad [H_S, N_S] = 0 = [H_B, N_B] \qquad [H_I, N_S+N_B] = 0 \qquad \bar\rho_S = \frac{e^{-\beta(H_S-\mu N_S)}}{Z_S}$

β & μ equilibrieren

BMS: ME respektieren die TD:

betrachte Entropie des Systems

$\boxed{\text{Sei } \rho \text{ eine DM} \quad S(\rho) = -\mathrm{Tr}\{\rho \ln \rho\} \quad \text{heißt von-Neumann-Entropie}}$

EW von ρ

$$\rho = \sum_n \rho_n |n\rangle\langle n| \qquad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}$$

$$S(\rho) = -\sum_n \rho_n \cdot \ln \rho_n = S_{Sh}(\{\rho_n\})$$

$$\rho_n \in [0,1] \qquad \sum_n \rho_n = 1$$

- $S(\rho) \geq 0$
- Bsp: bipartites System

a) $\rho_{12} = |\Psi^a\rangle\langle\Psi^a| \qquad |\Psi^a\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\left[|01\rangle + |10\rangle\right]$

$S(\rho_{12}) = 0$

$$\rho_1 = \mathrm{Tr}_2\{\rho_{12}\} = \frac12|0\rangle\langle0| + \frac12|1\rangle\langle1| \text{ (gemischt)}$$
$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad S(\rho_1) = \ln 2$$

$$\rho_{12} = |\Psi^b\rangle\langle\Psi^b| \qquad |\Psi^b\rangle = \underbrace{\frac{1}{\sqrt2}\left[|0\rangle + |1\rangle\right]}_{|\Psi^b_1\rangle} \otimes \left[|0\rangle + |1\rangle\right]\frac{1}{\sqrt2}$$

$$\to \rho_1 = |\Psi^b_1\rangle\langle\Psi^b_1|$$

$$\to S(\rho_1) = 0$$

Seien ρ und σ zwei DM
Dann ist die relative Quantenentropie zwischen ρ & σ gegeben durch

$$\boxed{D(\rho\|\sigma) = \mathrm{Tr}\{\rho\ln\rho - \rho\ln\sigma\} \geq 0}$$

Skript FK-Physik

- $D(\rho\|\rho) = 0$
- $D(\rho\|\sigma) \neq D(\sigma\|\rho)$

Lindblad: Kraus-Abb. sind kontraktiv

$$\rho' = \mathcal{K}\rho \qquad D(\mathcal{K}\rho\|\mathcal{K}\sigma) \leq D(\rho\|\sigma)$$

$$\mathcal{K} = e^{\mathcal{L}\cdot\Delta t} \qquad \mathcal{L}\bar\rho = 0$$

$=\sigma$

$$D(\rho\|\bar\rho) - D(e^{\mathcal{L}\cdot\Delta t}\rho\|\bar\rho) \geq 0$$

entwickle für kleine $\Delta t \to 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{Spohn'sche Ungleichung} \quad \mathcal{L}\bar\varrho = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathcal{L} \text{ sei Lindblad-Generator} \\ -\mathrm{Tr}\{(\mathcal{L}\varrho)[\ln\varrho - \ln\bar\varrho]\} \geq 0\end{array}}$$

Interpretation ?

Änderung von $S(\varrho)$

① Term

$$\frac{d}{dt}S(\varrho) = \dot S(\varrho) = -\mathrm{Tr}\{\dot\varrho\ln\varrho\} - \underbrace{\mathrm{Tr}\{\varrho\frac{d}{dt}\ln\varrho\}}_{=0} = -\mathrm{Tr}\{(\mathcal{L}\varrho)\ln\varrho\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}\{\varrho\frac{d}{dt}\ln\varrho\} = \mathrm{Tr}\{U\varrho_0U^\dagger[\dot U\ln\varrho_0U^\dagger + U\ln\varrho_0\dot U^\dagger + U\varrho_0^{-1}\cdot\dot\varrho_0U^\dagger]\}$$

$$= \mathrm{Tr}\{\varrho_0U^\dagger\dot U\ln\varrho_0 + U\varrho_0\cdot\ln\varrho_0\dot U^\dagger + \dot\varrho_0\}$$

$\varrho = U\varrho_0U^\dagger$ (ϱ_0: Diagonalmatrix)

$$= \mathrm{Tr}\{\varrho_0\underbrace{(U^\dagger\dot U + \dot U^\dagger U)}_{=0}\} + \underbrace{\mathrm{Tr}\{\dot\varrho_0\}}_{=0} = 0$$

$\ln\varrho = U\ln\varrho_0U^\dagger$

$$= \frac{d}{dt}U^\dagger U = \frac{d}{dt}1 = 0$$

1. Term entspricht $\frac{d}{dt}S(\varrho)$

② Term $+\mathrm{Tr}\{(\mathcal{L}\varrho)\cdot\ln\bar\varrho\}$

$$\bar\varrho = \frac{e^{-\beta(H_S-\mu N_S)}}{Z_S}$$

$$\mathrm{Tr}\{(\mathcal{L}\varrho)\ln\bar\varrho\} = -\beta\,\mathrm{Tr}\{(\mathcal{L}\varrho)(H_S-\mu N_S)\} - \ln(Z_S)\underbrace{\mathrm{Tr}\{(\mathcal{L}\varrho)\}}_{=0}$$

$$= \beta\cdot(I_E - \mu I_N) = \beta\cdot\dot Q$$

Wärmestrom in das System hinein

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}\{H_S\varrho\} = \mathrm{Tr}\{H_S\dot\varrho\} = \mathrm{Tr}\{H_S(\mathcal{L}\varrho)\} = I_E$$

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}\{N_S\varrho\} = \mathrm{Tr}\{N_S(\mathcal{L}\varrho)\} = I_N$$

$\Rightarrow$ Spohn'sche Ungl. bedeutet: $\dot S - \beta\dot Q \geq 0$

Verallgemeinerung der WW-Energie

$$dU_{res} = T\,dS_{res} + \mu\,dN_{res} \qquad \frac{dS_{res}}{dt} = \beta\left[\frac{dU_{res}}{dt} - \mu\frac{dN_{res}}{dt}\right] \approx -\beta(I_E - \mu I_N)$$

$$= -\beta\dot Q$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\dot S + \dot S_{res} \geq 0 \\ \text{2. Hauptsatz}\end{array}}$$

- $\dot S < 0$ ist möglich (Abkühlung des Systems)
- in SS: $\dot S \to 0$ & $\dot Q \to 0$, $\quad \dot S_i \to 0$

$$\dot S_i = \dot S + \dot S_{res} = \dot S - \beta\dot Q \geq 0$$

irreversible Entropie-Produktionsrate

$\Rightarrow$ BMS-Mastergleichung respektiert die TD

1.3.5 Coarse graining

+ einfachere Herleitung
+ lernen: 1 freier Parameter
+ immer Lindblad-Form

① Trafo in das WW-Bild

$$\dot{\tilde{\varrho}} = -i\left[\tilde{H}_I(t), \tilde{\varrho}(t)\right] \qquad \tilde{\varrho}(t) = \tilde{U}(t)\,\varrho_0\,\tilde{U}^\dagger(t)$$

$$U(t) = \hat{\tau}\exp\left\{-i\int_0^t \tilde{H}_I(t')\,dt'\right\} \qquad \frac{d}{dt}U = -i\,H(t)\,U(t) \quad : \int_0^t dt'$$

Zeitordnung

$$\tilde{U}(t) = \mathbb{1} - i\int_0^t \tilde{H}_I(t')\,\tilde{U}(t')\,dt'$$

wieder einsetzen

$$\tilde{U}(t) = \mathbb{1} - i\int_0^t \tilde{H}_I(t')\,dt' - \int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\,\tilde{H}_I(t_1)\,\tilde{H}_I(t_2) + \mathcal{O}(H_I^3)$$

$t_2 \le t_1$ "Zeitordnung"

$$\tilde{U}^\dagger(t) = \mathbb{1} + i\int_0^t \tilde{H}_I(t')\,dt' - \int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\,\tilde{H}_I(t_2)\,\tilde{H}_I(t_1) + \ldots$$

$$\mathrm{Tr}_B\left\{\tilde{U}(t)\,\varrho_S^0\otimes\varrho_B\,\tilde{U}^\dagger(t)\right\} = e^{\mathcal{L}\cdot t}\,\varrho_S^0 = \left[\mathbb{1} + \mathcal{L}\cdot t + \ldots\right]\varrho_S^0$$

bei $t = \tau$ $\qquad \mathcal{O}(\lambda^2)$

$$\mathrm{Tr}\{H_I(t)\,\varrho_B\} = 0 \qquad H_I = \mathcal{O}(\lambda)$$

Problem: $\mathcal{L}$ hängt von t ab

wähle: $\tilde{H}_I = \sum_\alpha \tilde{A}_\alpha(t)\otimes\tilde{B}_\alpha(t) = \tilde{H}_I^\dagger$

Coarse-graining Mastergleichung bei

$$\mathcal{L}_\tau\,\varrho_S = -i\left[\frac{1}{2i\tau}\int_0^\tau dt_1\int_0^\tau dt_2\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}(t_1,t_2)\cdot\mathrm{sgn}(t_1-t_2)\,\tilde{A}_\alpha(t_1)\,\tilde{A}_\beta(t_2),\ \varrho_S\right]$$

$$+\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt_1\int_0^\tau dt_2\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}(t_1,t_2)\left[A_\beta(t_2)\,\varrho_S\,A_\alpha(t_1) - \frac{1}{2}\left\{A_\alpha(t_1)A_\beta(t_2),\varrho_S\right\}\right]$$

$$C_{\alpha\beta}(t_1,t_2) = \mathrm{Tr}\left\{\tilde{B}_\alpha(t_1)\,\tilde{B}_\beta(t_2)\,\bar{\varrho}_B\right\}$$

· immer Lindblad