

4.3.2. Magnetische Dipolstrahlung, el. Quadrupolstrahlung

- Hertz'scher Dipol beschreibt EM Strahlung in 0. Ordnung der Multipolentwicklung des retardierten Potentials $A(\underline{r}, t)$ im Fernfeld

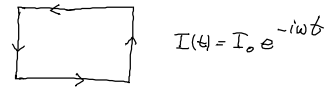
$r \gg \lambda \gg a$
 Beobachtungspunkt Ausdehnung der Quelle

$p \sim e^{i\omega t} \rightarrow \omega = c \cdot k$
 $\rightarrow \lambda = \frac{c}{\omega}$
 (Nahfeld $\lambda \gg r \gg a$ "Langsame Quelle")

Hinweis: Für den Fall, dass niedrigste Ordnung verschwindet (für quellfreie Stromdichten $\underline{j}(\underline{r}, t)$) muss nächste Ordnung berücksichtigt werden, : $A^{(1)}(\underline{r}, t)$

d.h. $\nabla_{\underline{r}} \cdot \underline{j}(\underline{r}', \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \rho(\underline{r}', \tau) = 0 \rightarrow \dot{\underline{p}}(\tau) = \int d^3r' \underline{r}' \dot{\rho}(\underline{r}', \tau) = 0$

$A^{(0)}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\underline{p}}(\tau) = 0$



Beispiel: geschlossene Leiterschleife (Drahtantenne)

1. Ordnung von $A(\underline{r}, t)$:

aus Entwicklung des Argumentes von $\underline{j}(\underline{r}', t')$

$A^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \left(1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \underline{j}(\underline{r}', \tau)$

$\tau = t - \frac{r}{c}$

2. Term der Taylorentwicklung von $\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$

(*) mit $(\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j}(\underline{r}', \tau) = \frac{1}{2} (\underline{r}' \times \underline{j}) \times \underline{r} + \frac{1}{2} [(\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j} + (\underline{r}' \cdot \underline{j}) \underline{r}']$ (bac-cab)

und $\nabla_{\underline{r}'} \cdot \{x_k'(\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j}\} = [(\underline{r} \cdot \underline{r}') \dot{j}_k + x_k'(\underline{r} \cdot \underline{j})] + x_k'(\underline{r} \cdot \underline{r}') \nabla_{\underline{r}'} \cdot \underline{j} = -\dot{j}_k$ (Produktregel)

(*)₂ $\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \xrightarrow{\text{Gauß}} 0 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' [(\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j} + (\underline{r}' \cdot \underline{j}) \underline{r}'] - \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{r}' \dot{\underline{j}}$

$\Rightarrow \int d^3r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j}(\underline{r}', \tau) = \underbrace{\left[\frac{1}{2} \int d^3r' (\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}', \tau)) \right]}_{\text{magn. Dipolmoment}} \times \underline{r} + \underbrace{\frac{1}{2} \int d^3r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{r}' \dot{\underline{j}}}_{\sim \dot{Q} \cdot \underline{r}}$

der elektrische Quadrupoltensor $\underline{\underline{Q}}$ lässt sich schreiben als

$$\underline{\underline{Q}}(\underline{r}) = \int d^3r' \rho(\underline{r}', \underline{r}) (3 \underline{r}' \otimes \underline{r}' - r'^2 \underline{\underline{1}})$$

$$\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{r} = 3 \int d^3r' \rho(\underline{r}', \underline{r}) \underline{r}' (\underline{r}' \cdot \underline{r})$$

L

Also:

$$A^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\underline{m}(t) \times \underline{r} + \frac{1}{6} \underline{\underline{Q}}(t) \cdot \underline{r} \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \underbrace{\frac{1}{r^3} \underline{m} \times \underline{r}}_{\text{magn. Dipolstrahlung}} + \underbrace{\frac{1}{cr^2} \dot{\underline{m}} \times \underline{r} + \frac{1}{6r^3} \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{r} + \frac{1}{6cr^2} \ddot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{r}}_{\text{el. Quadrupolstrahlung}} \right\}$$

magn. Dipolstrahlung $A_m^{(1)}$

el. Quadrupolstrahlung

(vgl. VL vom 1.11.
statisch: $A^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underline{m} \times \underline{r}$)

el. Dipolstrahlung
 $\left[A^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\underline{p}}(t) \right]$

die magn. Dipolstrahlung lässt sich schreiben als

$$\nabla \times \frac{1}{r} \underline{m}(t - \frac{r}{c}) = \frac{1}{r^3} \underline{m}(t - \frac{r}{c}) \times \underline{r} + \frac{1}{cr^2} \dot{\underline{m}}(t - \frac{r}{c}) \times \underline{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_m^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\nabla \times \frac{1}{r} \underline{m}(t - \frac{r}{c}) \right)}$$

magnetische Dipolstrahlung

Skalares Potenzial aus Lorenz-Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\underline{r}, t) = -c^2 \nabla \cdot \underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = -\frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \nabla \cdot \left(\nabla \times \frac{1}{r} \underline{m} \right) \equiv 0$$

zeitunabhängiges $\phi(\underline{r}, t) = \phi(\underline{r}) \stackrel{!}{=} 0$

o.B.d.A.
kein statisches Potenzial, aber keine Gesamtladung

- Berechnung der Felder der magnetischen Dipolstrahlung im Fernfeld :

$$B_m(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3} \left[\ddot{\underline{m}}(t - \frac{r}{c}) \times \underline{r} \right] \times \underline{r} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

el. Quadrupolstrahlung:

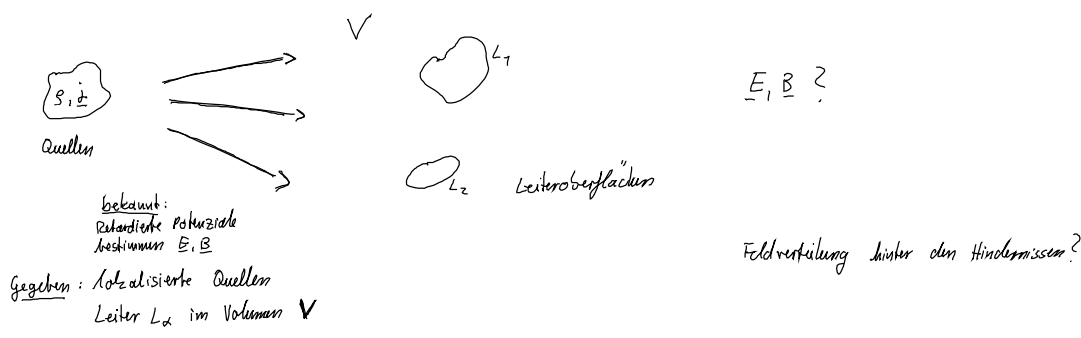
$$B_{el.Q}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3} \left[\frac{1}{6} \ddot{\underline{\underline{Q}}}(t - \frac{r}{c}) \cdot \underline{r} \right] \times \underline{r} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

wenn vernachlässigt \rightarrow Fernfeld $r \gg \lambda \gg a$

- E-Felder ergeben sich im Fernfeld analog zur el. Dipolstrahlung durch $\underline{E} = c \left(\underline{B} \times \frac{\underline{r}}{r} \right)$.

4.4. Wellenoptik und Beugung

Frage: Was passiert bei Wellenausbreitung in Anwesenheit von Leitern?



Gesucht: Wellenfeld im Außenraum

Methode: Zurückführen auf Randwertaufgabe zu gegebenen $s(\underline{r}, t), \underline{j}(\underline{r}, t)$, sowie Kausalitätsbedingungen

Annahme: $s(\underline{r}, t) = \underline{s}(\underline{r}) e^{-i\omega t}$ o. B.d.A. wegen Fourierreuelegung
 $\underline{j}(\underline{r}, t) = \underline{j}(\underline{r}) e^{-i\omega t}$
 (periodische Erregung)

$\phi(\underline{r}, t) = \phi(\underline{r}) e^{-i\omega t}$
 $\underline{A}(\underline{r}, t) = \underline{A}(\underline{r}) e^{-i\omega t} \Rightarrow$ einsetzen in Wellengleichung $(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} s$

$(\Delta + k^2) \phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} s(\underline{r})$

mit $|k| := \frac{\omega}{c}$
 Helmholtzgleichung

Greensche Funktion der Wellengleichung $\square \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} s$
 $\square G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$

allgemeine Lösung (ret. Potenzial) $\phi(\underline{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_0^t dt' G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') s(\underline{r}', t')$ (Faltung)

$= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^t dt' \underbrace{G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')}_{\int_0^\infty d\tau G(\underline{r}-\underline{r}', \tau) e^{i\omega\tau}} e^{i\omega t'} s(\underline{r}')$ $\tau = t-t'$

$$=: \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \\ = \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r' \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') g(\underline{r}')$$

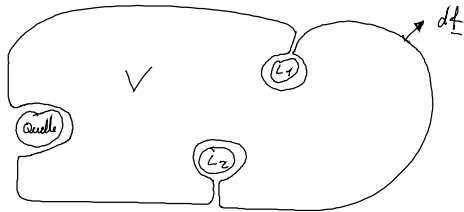
wobei $\boxed{(\Delta + k^2) \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$
 ↑
 Green-Fkt. der Helmholtzgleichung

Die periodische Zeitabhängigkeit lässt sich abspazieren und $\phi(\underline{r})$ ist gegeben durch:

$$\boxed{\phi(\underline{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r' \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') g(\underline{r}')}$$

Problem: Randbedingungen für ϕ, \underline{A} sind im nicht-statischen Fall nicht bekannt und müssen selbstkonsistent bestimmt werden.

Skalare Kirchhoff-Identität



Greensche Satz:

$$\int_{\partial V} d\underline{f} (\psi \nabla \psi - \psi \nabla \psi) = \int_V d^3r (\psi \Delta \psi - \psi \Delta \psi)$$

mit $\psi(\underline{r}) = \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')$
 $\psi(\underline{r}) = \phi(\underline{r})$

$$\Rightarrow \int_{\partial V} d\underline{f} (\phi \nabla_r \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') - \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \nabla_r \phi) = \int_V d^3r (\phi \Delta \tilde{G} - \tilde{G} \Delta \phi)$$

$\Delta \tilde{G} = -\delta - k^2 \tilde{G}$ $\Delta \phi = -k^2 \phi - \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\boxed{- \int_{\partial V} d\underline{f} [\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \nabla_r \phi(\underline{r}) - \phi(\underline{r}) \nabla_r \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')] = -\phi(\underline{r}')} \quad \underline{r}' \in V$$

$\phi(\underline{r}')$ im Inneren von V ist durch ϕ und $\nabla \phi$ auf dem Rand festgelegt falls die Greensche Funktion \tilde{G} bekannt ist.

Ⓐ Greenfkt. des unendlichen Raums:

Randbed. $\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ → retardierte Potentiale

$$G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi |\underline{r}-\underline{r}'|} \delta(t-t' - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') := \int_0^\infty dt G(\underline{r}-\underline{r}', t) e^{i\omega t} = \boxed{\frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi |\underline{r}-\underline{r}'|} = \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}')}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(\underline{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \tilde{G}(\underline{r} - \underline{r}') e^{-i\omega t} \mathcal{J}(\underline{r}') \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \frac{e^{i(k|\underline{r} - \underline{r}'| - \omega t)}}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} \mathcal{J}(\underline{r}') \end{aligned}$$

beschreibt Überlagerung auslaufender
Kugelwellen.

Fortsetzung folgt.