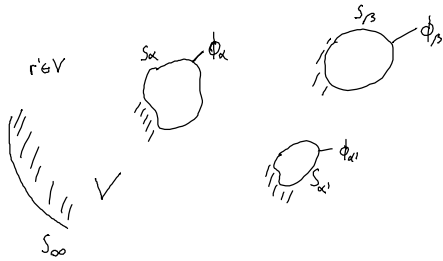


1.7. Randwertaufgabe der Elektrostatik

1. Grundaufgabe



geg.: Leiter L_α mit Oberfläche S_α
mit Potential ϕ_α

gesucht: • $\phi(\underline{r})$ als Lösung von
 $\Delta\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r})$ mit Randbedingungen
 $\phi(\underline{r})|_{S_\alpha} = \phi_\alpha$
 $\phi(\underline{r})|_{S_\infty} \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$)
 • Q_α ? Ladungen auf Leitersflächen

Suchen allgemeine Lösung der Poisson gl. $\Delta_r \phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r})$ mit RB

$$\phi(\underline{r}) = \phi_{inhom}(\underline{r}) + \phi_{hom}(\underline{r})$$

spezielle Lösung
zu RB bei $r \rightarrow \infty$: $\phi(r) \rightarrow 0$

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

allg. Lösung $\rho = 0$
 $\Delta\phi = 0$ [Laplace-Gleichung] mit spez. RB
 Dirichlet RB

Allgemeine Lösung

$$\phi(\underline{r}) = \int_V d^3r' G(\underline{r} - \underline{r}') \rho(\underline{r}') + \epsilon_0 \sum_{\alpha=1}^n \phi_\alpha \int_{S_\alpha} d\underline{r}' \nabla_{r'} G(\underline{r} - \underline{r}') \quad (*)$$

wobei die Greensche Funktion $G(\underline{r} - \underline{r}')$ die Lösung von $\Delta_r G(\underline{r} - \underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\underline{r} - \underline{r}')$ zu

$$\text{RB } G(\underline{r} - \underline{r}')|_{\substack{\underline{r} \in S_\alpha \\ \underline{r}' \in V}} = 0 \quad (\text{auf Leitersflächen ist } \phi = \text{const})$$

$$G(\underline{r} - \underline{r}')|_{\underline{r} \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad \text{ist}$$

Beweis:

(1) Herleitung des Greenschen Satzes
aus dem Gauß'schen Satz

$$\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \underline{v} = \int_V d^3r \operatorname{div} \underline{v}$$

mit $\underline{v} = \gamma \nabla \varphi$ folgt $\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \gamma \nabla \varphi = \int_V d^3r (\gamma \Delta \varphi + \nabla \gamma \cdot \nabla \varphi)$ ①

(γ, φ sind skalare Funktionen von \underline{r})

mit $\underline{v} = \varphi \nabla \gamma$ folgt $\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \varphi \nabla \gamma = \int_V d^3r (\varphi \Delta \gamma + \nabla \varphi \cdot \nabla \gamma)$ ②

\Rightarrow ② - ①

$$\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \nabla \gamma - \gamma \nabla \varphi) = \int_V d^3r (\varphi \Delta \gamma - \gamma \Delta \varphi) \quad \text{Greenscher Satz}$$

$\rightarrow d\vec{f}$ zeigt aus Volumen raus.

(2) Beweis von *

Fahrplan: zeige (A) $\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$ mit RB $\rightarrow \phi(\underline{r}) = *$ Teil A

(B) $\phi(\underline{r}) = *$ \rightarrow $\begin{cases} \Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho & \text{im Inneren von } V & \text{Teil 1} \\ \phi \text{ erfüllt RB} & \phi|_{S_\alpha} = \phi_\alpha & \text{Teil 2} \end{cases}$

(A) Nutze Greenschen Satz mit $\gamma(\underline{r}') := G(\underline{r} - \underline{r}')$
 $\varphi(\underline{r}') := \phi(\underline{r}')$

$$\int_{\partial V} d\vec{f}' \cdot \phi(\underline{r}') \nabla_{\underline{r}'} G(\underline{r} - \underline{r}') - \int_{\partial V} d\vec{f}' \cdot G(\underline{r} - \underline{r}') \nabla_{\underline{r}'} \phi(\underline{r}') = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\int_V d^3r' \phi(\underline{r}') \underbrace{\Delta_{\underline{r}'} G(\underline{r} - \underline{r}')}_{\substack{\Delta G(\underline{r} - \underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\underline{r} - \underline{r}') \\ \text{Poisson GE} \\ \Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho}} - \int_V d^3r' G(\underline{r} - \underline{r}') \underbrace{\Delta_{\underline{r}'} \phi(\underline{r}')}_{\substack{\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho}} \right]$$

$d\vec{f}'$ zeigt aus dem Leiter raus ins Volumen rein
 \rightarrow Vorzeichenwechsel



0
wegen $G|_{\underline{r}' \in S_\alpha} = 0$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}) = \int_V d^3r' G(\underline{r} - \underline{r}') \rho(\underline{r}') + \epsilon_0 \sum_{\alpha=1}^n \phi_\alpha \int_{S_\alpha} d\vec{f}' \cdot \nabla_{\underline{r}'} G(\underline{r} - \underline{r}') \quad \text{Teil A}$$

Teil B Teil 1: Anwenden von Δ_r auf *

$$\Delta_r \phi(\underline{r}) = \int_V d^3r' \underbrace{\Delta_r G(\underline{r} - \underline{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\underline{r} - \underline{r}')} \rho(\underline{r}') + \epsilon_0 \sum_{\alpha=1}^n \phi_\alpha \int_{S_\alpha} d\vec{f}' \cdot \underbrace{\Delta_r G(\underline{r} - \underline{r}')}_{-\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\underline{r} - \underline{r}')}$$

$r' \in S_\alpha$
 Γ : Beobachtungspunkt
 nicht auf Oberfläche
 (auf Oberfläche ist $\phi(r) = \phi_\alpha$)
 $= 0$

$$\Rightarrow \Delta_r \phi(r) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(r)$$

Teil 1, Teil B

Teil 2: Überprüfen der RB

$$\text{z.z. } \phi(r)|_{r \in S_\beta} = \phi_\beta$$

$$\phi(r)|_{r \in S_\beta} = \int_V d^3r' \underbrace{G(r-r')}_{=0} \rho(r') + \epsilon_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \int_{S_\alpha} d\Omega' \nabla_{r'} G(r-r')|_{r \in S_\beta}$$

da für $r' \in V$
 $r \in S_\beta$ $G(r-r') = 0$

$$= -\epsilon_0 \int_{\partial V} d\Omega' \phi(r') \nabla_{r'} G(r-r')|_{r \in S_\beta}$$

Vorzeichenwechsel damit
 $d\Omega'$ vom Leiter weg zeigt

Green'scher Satz

$$= -\epsilon_0 \int_{\partial V} d\Omega' \underbrace{G(r-r')|_{r \in S_\beta}}_0 \nabla_{r'} \phi + \int_V d^3r' \left(\underbrace{\phi \Delta_r G(r-r') - G(r-r') \Delta_r \phi(r)}_{\downarrow} \right)$$

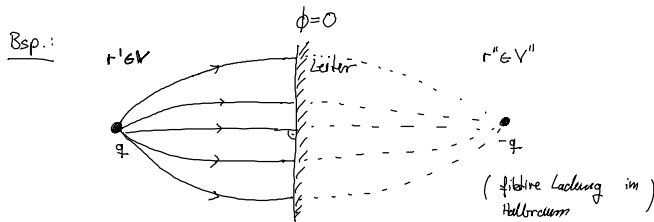
\downarrow
 $-\frac{1}{\epsilon_0} \delta(r-r')$
 $-\frac{1}{\epsilon_0} \phi(r)|_{r \in S_\beta}$

$$= \phi_\beta$$

Teil 2, Teil B

Visualisierungen der E-Dynamik
www.falstad.com

- Konstruktion der Green'schen Funktionen $G(r-r')$ noch nötig bevor Lösung für $\phi(r)$ ^{aus ②} bekannt ist.



$$\rightarrow G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}''|} \right)$$

Konstruktion über Methode der Bildladungen erfüllt die Bedingungen $G(\underline{r}-\underline{r}')|_{r \in S_\alpha} = 0$

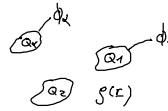
• Ladung $Q_\alpha = \oint_{S_\alpha} d\underline{f}' \cdot \underline{\sigma}(\underline{r}') = \epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f}' \cdot \underbrace{n' \cdot \underline{E}(\underline{r}')}_{d\underline{f}' \cdot \underline{E}} = -\epsilon_0 \int_{S_\alpha} d\underline{f}' \cdot \nabla_{\underline{r}'} \phi(\underline{r}')$

↑
Fluss durch die Oberfläche

wenn $\phi(\underline{r})$ bekannt
→ Q_α bekannt.

2. Grundaufgabe: Randwertproblem mit gegebenen Ladungen Q_α [nicht wie in 1. Grundaufgabe ϕ_α]

geg: Leiter L_α $\alpha=1, \dots, n$
mit Ladungen Q_α
Raumladungsdichte $\rho(\underline{r})$ im Raumraum



ges: $\phi(\underline{r}), \phi_\alpha$

Lösung: Liniendefinition auf 1. Grundaufgabe durch Zusammenhang zwischen Q_α und ϕ_α

es gilt $Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^n C_{\alpha\beta} \phi_\beta$

$C_{\alpha\beta}$: Kapazitätskoeffizienten

(wegen Linearität der Poisson-Gleichung)

Beweis: $Q_\alpha = -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \nabla_{\underline{r}} \phi(\underline{r})$

Lösung $\oplus \searrow = -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \nabla_{\underline{r}} \left[\int_V d^3r' G(\underline{r}-\underline{r}') \rho(\underline{r}') \right] - \epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \nabla_{\underline{r}} \left[\sum_{\beta=1}^n \phi_\beta \oint_{S_\beta} d\underline{f}' \cdot \nabla_{\underline{r}'} G(\underline{r}-\underline{r}') \right]$

Green'scher Satz

$\searrow = -\epsilon_0 \int_{L_\alpha} d^2r' \int_V d^3r' \underbrace{\nabla_{\underline{r}} G(\underline{r}-\underline{r}') \cdot \underline{n}}_{-\frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\underline{r}-\underline{r}') = 0 \text{ falls } \underline{r}' \in V} \rho(\underline{r}') - \sum_{\beta=1}^n \phi_\beta \underbrace{\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \nabla_{\underline{r}} \oint_{S_\beta} d\underline{f}' \cdot \nabla_{\underline{r}'} G(\underline{r}-\underline{r}')}_{= C_{\alpha\beta}}$

$= \sum_{\beta=1}^n C_{\alpha\beta} \phi_\beta$