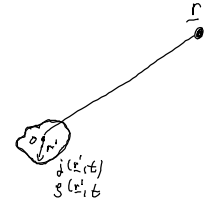


## 4.3. Multipolstrahlung

Ziel: Die retardierten Potentiale sollen für räumlich lokalisierte  $t$ -abhängige Ladungs- und Stromverteilungen berechnet werden.

(analog zur Multipolentwicklung in der Statik)

$$r \gg r'$$



Voraussetzung: Lorenz-Eichung  $\dot{\phi} + c^2 \nabla \cdot \underline{A} = 0$

$\rightarrow$  aus  $\underline{A}(r, t)$  kann  $\phi(r, t)$  und damit auch  $\underline{E}(r, t), \underline{B}(r, t)$  berechnet werden.

Startpunkt: Lösung von  $\square \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}$

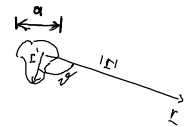
$$\underline{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \frac{\underline{j}(r', t - \frac{|r-r'|}{c})}{|r-r'|}$$

retardiertes Potential

1. Näherung:  $r \gg a$   $a$ : Ausdehnung der Quelle

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} (r \cdot r') + \dots$$

$$r \cdot r' = r r' \cos \vartheta$$



$$\rightarrow \underline{A}(r, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \underline{j}(r', t - \frac{|r-r'|}{c}) + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' (r \cdot r') \cdot \underline{j}(r', t - \frac{|r-r'|}{c})$$

2. Näherung:  $t - \frac{|r-r'|}{c} \approx \underbrace{t - \frac{r}{c}}_{\tau} + \frac{r \cdot r'}{c r} + \dots$

falls  $\tau \gg \frac{r' r}{c r} \sim \frac{a}{c}$

relative Retardierung der einzelnen Punkte der Quelle ist klein

$\tau$ : charakteristische Zeit für Änderung von  $\underline{j}$

z.B. harmonische Erregung  $\underline{j} \sim e^{i\omega t}$

$$\omega \tau = 2\pi$$

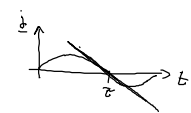
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{c}$$

$$\rightarrow \underline{a \ll \lambda}$$

NB: - gute Näherung für Rayleigh-Strahlung ( $a \ll \lambda$ )

- schlechte Näherung für Mie-Strahlung (Wassertropfen  $a \sim \lambda$ )

$$\Rightarrow \underline{j}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}) \approx \underline{j}(\underline{r}', t - \frac{r}{c}) + \frac{r r'}{c r} \frac{\partial \underline{j}}{\partial t}(\underline{r}', \tau)$$



Einsetzen von 1. & 2. Näherung in  $\underline{A}(\underline{r}, t)$ :

$$\underline{A}(\underline{r}, t) \approx \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underline{j}(\underline{r}', \tau)}_{\underline{A}^{(0)}(\underline{r}, \tau)} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3r' (\underline{r} \underline{r}') \left(1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \underline{j}(\underline{r}', \tau)}_{\underline{A}^{(1)}(\underline{r}, \tau)} + \dots$$

↑  
Monopolterm

niedrigste Ordnung verschwindet nicht,  
da im Gegensatz zur Statik  $\nabla \cdot \underline{j} \neq 0$

mit  $\nabla_{r'} \cdot [\underline{x}_k \underline{j}] = \underline{x}_k \cdot \nabla_{r'} \underline{j}(\underline{r}', \tau) + \underline{j}_k(\underline{r}', \tau) - \dot{\underline{j}}_k(\underline{r}', \tau)$  *Ladungserhaltung, Kontinuitätsgleichung*

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \nabla_{r'} \cdot (\underline{x}_k \underline{j}) = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underline{x}_k \dot{\underline{j}}(\underline{r}', \tau) + \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underline{j}_k(\underline{r}', \tau)$$

↙

0

$\int_{S(\infty)} d\underline{x} \underline{x}_k \underline{j}$

↘  $\underline{j} \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$

$\dot{\underline{p}}_k(\tau)$

el. Dipolmoment  $\underline{p}(\tau) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underline{x}' \rho(\underline{r}', \tau)$

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\underline{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

elektrische Dipolstrahlung

### 4.3.1. Elektrische Dipolstrahlung

Hertzscher Dipol (H. Hertz 1857 - 1894)

$$\updownarrow \underline{p}(t) = p_0 e^{-i\omega t}$$

Gesamtladung  $Q_0 = 0$

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{-i\omega \mu_0}{4\pi r} p_0 e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}$$

$$= \frac{-i\omega \mu_0 p_0}{4\pi r} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Kugelwelle

el. Potential aus Lorentz-Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\underline{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla \cdot \underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \nabla \cdot \left( \frac{1}{r} \dot{\underline{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right)$$

$$\rightarrow \phi(r, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla_r \left\{ \frac{1}{r} p(t - \frac{r}{c}) \right\} + \phi_{\text{stat}}^{(0)}(r) \left\{ \begin{array}{l} \text{statische Monopolform} \\ \text{o. B. d. A. keine Gesamtladung, } Q_0 = 0 \\ \rightarrow \phi_{\text{stat}}^{(0)} = 0 \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \underbrace{\frac{r}{c r^2} \dot{p}(t - \frac{r}{c})}_{\sim \frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{1}{r^3} r \cdot p(t - \frac{r}{c})}_{\frac{1}{r^2}} \right\}$$

↑  
Fernfeld

---

Nahfeld

Grenzfälle:

(i) Fernzone (Wellenzone)  $r \gg \lambda (\gg a)$

$$\phi_F^{(0)}(r, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c r^2} r \cdot \dot{p}(t - \frac{r}{c})$$

$$\left[ \frac{1}{c} \dot{p} \sim \frac{\omega}{c} p \gg \frac{p}{r} \right]$$

Retardierung ist wichtig

(ii) Nahzone (quasi statischer Bereich)  $\lambda \gg r (\gg a)$

$$\phi_D^{(0)}(r, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} r \cdot p(t) + \left[ -\frac{1}{r^3} \frac{r}{c} r \dot{p}(t) + \frac{1}{c r^2} r \dot{p}(t) \right] \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

↑  
Entwicklung nach  $p(t)$

Retardierung kompensiert den  $\dot{p}$ -Term des Fernfeldes  
des 2. Terms

instantanes Dipolpotenzial!

Siehe VL vom 16.10  $\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot r}{r^3}$

Berechnung der Felder in Fernfeldnäherung (Dipolnäherung)

$$\underline{B}_F(r, t) = \nabla \times \underline{A}^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r^2} \left[ \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \times r \right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

↑ Rotation auf  $\dot{p}$       ↑  $\frac{r}{r^2}$  ableiten liefert Terme  $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$

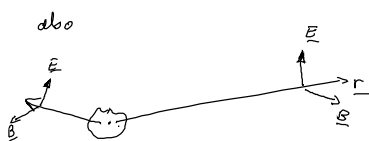
$$\underline{E}_F(r, t) = -\nabla \phi_F^{(0)} - \dot{\underline{A}}^{(0)}(r, t)$$

Übung ↓

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r^3} \left[ \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \times r \right] \times r + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

es gilt:  $\underline{B} \times \left(\frac{r}{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r^3} (\ddot{p} \times r) \times r = \frac{1}{c} \underline{E}$



$r, E, B$  bilden ein Rechtssystem im Fernfeld

$$r \perp E \perp B$$

Ausbreitung wie eine freie Kugelwelle

NB: In der Nahzone gilt immer noch  $\underline{B} \perp \underline{r}$   
 aber  $\underline{E}$  hat longitudinale Anteile  $\underline{E}_{||} \parallel \underline{r}$

### Energieabstrahlung im Fernfeld

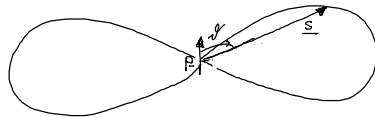
Poynting - Vektor

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{E} \times \underline{H} = -\frac{1}{\mu_0} \underline{B}_F \times \underline{E}_F = -\frac{c}{\mu_0 r} \underline{B}_F \times (\underline{B}_F \times \underline{r}) \\ &= -\frac{c}{\mu_0 r} \left\{ \underbrace{(\underline{B}_F \cdot \underline{r}) \underline{B}_F}_{0} - B^2 \underline{r} \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{1}{r^4} \left( \ddot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \underline{r} \right)^2 \frac{1}{r} \underline{r} \end{aligned}$$

$$\underline{S} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} |\ddot{\underline{p}}|^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \frac{\underline{r}}{r}$$



Abstrahlcharakteristike:  
 stark richtungsabhängig



Hertz'scher Dipol:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}_0 e^{-i\omega t} \quad : \quad |\ddot{\underline{p}}|^2 = \underline{p}_0^2 \omega^4$$

=> blaues energiereiches Licht wird mehr gestreut als rotes  
 -> Himmelblau  
 Rayleigh - Streuung

• bewegte Ladung:  $\ddot{\underline{p}} = q \underline{a}(t)$

Gesamtenergie der Abstrahlung

$$\int \underline{S} \, d\underline{f} \Rightarrow$$

(Larmor - Gleichung)

$$P = \int \underline{S} \cdot \underline{r} \, 2\pi r^2 \sin^2 \vartheta = \frac{q^2 |a|^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

abgestrahlte Leistung  $\sim |a|^2$   
 Strahlungs-dämpfung!